– выводы по проделанной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е. А. Численные методы.: Учебное пособие.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 256 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н. П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.

3. Калиткин Н. Н. Численные методы. Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 512 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ 3
2. ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ 3
2.1 Методы, применяемые для расчета на ЭВМ 3
2.2 Метод Гаусса 4
2. 3. Нормы и мера обусловленности матриц 10
2.4. Метод прогонки 12
3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ 14
4. ПОДГОТОВКА К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 15
5. РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ 15
6. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ 17
ЛИТЕРАТУРА 18

ISSN 0202 – 3205

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РОСИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Управление и информатика в технических системах»

МАКСИМОВ В. М.

УТВЕРЖДЕНО
редакционно-издательским
советом университета

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВМ

Методические указания к лабораторным работам по курсу

«Вычислительные задачи систем управления»

для студентов специальности

«УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»

МОСКВА – 1997

УДК: 621.318.43.001.24 (075.8)
М17

Максимов В.М. Точные методы решения систем линейных алгебраических уравнений с использованием ЭВМ : Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Вычислительные задачи систем управления» - М.: МИИТ. 1998. - 18 с.

В методических указаниях к лабораторным работам рассмотрены метод Гаусса и метод прогонки для решения систем линейных алгебраических уравнений и вычисления определителей.

Сформулированы задачи по алгоритмической и программной реализации этих методов, оценке степени обусловленности систем, а также анализу оценки погрешности из-за приближенности исходных данных и ограничения разрядности при выполнении вычислительных операций.

Учебно-методическое издание
Максимов Владислав Михайлович

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВМ

Методические указания к лабораторным работам по курсу «Вычислительные задачи систем управления»

Подписано в печать 30.12.97 Формат 60x84 1/16 Тираж 100 экз.
Усл. печ. л. 1,125 Заказ 717 Изд.№ 51

101475, Москва, ул. Образцова, 15

Типография МИИТа

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является изучение точных методов, применяемых в прикладном программном обеспечении, для решения систем линейных алгебраических уравнений и вычисления определителей, алгоритмической и программной реализации этих методов, а также анализ оценки вычислительной погрешности из приближенности исходных данных и ограничения разрядности при выполнении вычислительных операций.

2. ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

2.1 Методы, применяемые для расчета на ЭВМ

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений разбивают на две группы. К одной группе принадлежат так называемые точные или прямые методы, использующие точные формулы для получения решения за конечное число арифметических действий. Сюда относятся наиболее известные правило Крамера для нахождения решения с помощью определителей, метод Гаусса (метод исключения) по схеме единственного деления или по схеме с выбором главного элемента, метод прогонки и ряд специальных методов. Другую группу составляют приближенные методы, использующие итерационные формулы решения.

Правило Крамера для ЭВМ не применяется, так как оно требует значительно большего числа арифметических действий, чем метод Гаусса. Число выполняемых арифметических действий определяет величину вычислительной погрешности и время, затрачиваемое на решение. Еще одной характеристикой методов является объем памяти, необходимый для размещения исходных данных и промежуточных результатов. Для современных ЭВМ наиболее существенным ограничением для метода Гаусса обычно является величина вычислительной погрешности. Метод Гаусса используется при решении систем порядка до 10^3, а итерационные методы – до порядка 10^6. Однако, для микропроцессорных систем управления, работающих в реальном времени, определяющим может быть время вычисления или объем данных. Метод прогонки применяется для решения важного класса специальных систем линейных с трехдиагональной матрицей уравнений высокого порядка, часто возникающих в задачах управления при аппроксимации, идентификации, решении краевой задачи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

2.2 Метод Гаусса

2.2.1. Схема единственного делителя

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i\,n+1}, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{2.1}$$

где a_{ij} – коэффициенты i-го уравнения перед неизвестной x_j;

$a_{i\,n+1}$ – свободный член i – го уравнения.

Решение методом Гаусса состоит из двух этапов: прямого и обратного хода. В *прямом ходе* осуществляется приведение системы к *треугольной форме* путем последовательного исключение переменных

x_k для k=1, 2, ... , n-1 из уравнений (2.1) для i=k+1, ... , n. При исключении k-ой переменной из i-го уравнения определяется коэффициент

$$m = a_{ik} / a_{kk}, \tag{2.2}$$

если называемый *ведущим* элемент

$$a_{kk} \neq 0, \tag{2.3}$$

Затем из i-го уравнения вычитается k-ое уравнение, умноженное на m. В результате первые k коэффициентов i-го уравнения будут равными 0, а остальные - принимают значение в соответствии с формулой пересчета коэффициентов:

$$a_{ij} = a_{ij} - m\, a_{kj} \tag{2.4}$$

(здесь одинаково обозначены коэффициенты до и после пересчета, а знак равенства соответствует операции присвоения).

Рассмотренная последовательность действий, называемая *схемой с единственным делителем*, позволяет выполнить исключение, если для каждой исключаемой переменной x_k выполняется условие (2.3). В результате прямого хода Гаусса система приводится к треугольному виду:

$$a_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i,n+1}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.5}$$

Если какой-либо ведущий элемент в прямом ходе окажется равным нулю, то изложенный метод непригоден для данной системы, даже имеющей единственное решение.

Возможные исходы решения после приведения системы к треугольной виду:

1) система не имеет решения, если последний коэффициент последнего уравнения равен нулю, а свободный член не равен нулю:

$$a_{n\ n} = 0, \quad a_{n\ n+1} \neq 0; \tag{2.6}$$

2) система имеет *бесконечное множество решений*, если все коэффициенты и свободный член последнего уравнения равны нулю:

$$a_{n\,i} = 0 \quad i = n\,,\, n+1; \tag{2.7}$$

3) система имеет *единственное решение*, если последний коэффициент последнего уравнения отличен от нуля:

$$a_{n\ n} \neq 0. \tag{2.8}$$

Обратный ход, в котором в обратном порядке, начиная с последней, определяются неизвестные по формулам:

$$x_n = a_{n\,n+1} \,/\, a_{n\ n}, \tag{2.8}$$

$$x_i = (a_{i\ n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j) \,/\, a_{ii}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{2.9}$$

Число выполняемых арифметических действий (без учета операций организации вычислений и контроля) в прямом ходе примерно равно $2/3n^3$, а в обратном ходе – n^2, что объясняется тем, что прямой ход выполняется с помощью трех вложенных циклов (цикл по $k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ для исключаемых переменных; цикл по $i = k+1, k+2, \ldots, n$ для уравнений, из которых исключаются переменные; цикл по $j = k+1, k+2, \ldots, n$ для пересчета коэффициентов в каждом из уравнений) и обратный ход включает два вложенных цикла (цикл расчета неизвестных по $i = n, n\text{-}1, \ldots, 1$; цикл по $j = i+1, i+2 \ldots, n$ вычисления произведений и их суммирования в (2.7)). Рассмотренная здесь последовательность исключения переменных и вычисления неизвестных является более предпочтительной по сравнению с другими, так как имеет минимальное число вычислительных операций. Матрица системы имеет n^2 элементов, и при пересчете коэффициентов новые значения записываются в ту же область памяти.

Вычислительная погрешность, или погрешность округления возникает из-за вычислений при ограниченном числе значащих цифр. Относительная вычислительная погрешность метода равна сумме относительных погрешностей всех выполняемых действий. Оценка относительной вычислительной погрешности в предположении, что равны оценки относительных вычислительных погрешностей всех действий, пропорциональна числу этих действий:

$$\delta_x = \delta \cdot N_{on} \tag{2.10}$$

где δ – оценка относительной погрешности действия (операции);

N_{on} – число вычислительных действий.

Однако, для некоторых арифметических действий вычислительная погрешность может быть значительно больше других. Так например, вычитание близких чисел приводит к значительной потере точности вычисления по сравнению с точностью операндов. Поэтому для некоторых систем, называемых плохо обусловленными, вычислительная погрешность может превысить допустимое значение даже при невысоком их порядке. Так получается, если в процессе вычислений встречаются ведущие элементы, которые по модулю достаточно малы по сравнению с другими коэффициентами соответствующего уравнения.

2.2.2. Схема с выбором главного элемента

Главным элементом системы называется максимальный по модулю ведущий элемент. *Схема с выбором главного элемента* незначительно отличается от схемы с единственным делителем. Для этого надо перед исключением каждой переменной сделать очередной ведущий элемент главным, т.е. при исключении x_k сначала надо добиться выполнения условия

$$|a_{kk}| \ge |a_{ij}|, \quad i, j = k, k+1, \dots, n, \tag{2.11}$$

найдя максимальный по модулю коэффициент и выполнив в случае необходимости перестановку двух уравнений и двух столбцов неизвестных со своими коэффициентами и соответствующей перенумерацией коэффициентов и неизвестных. Найденный максимальный по модулю элемент, обозначенный при перенумерации через a_{kk}, называется k–ым главным элементом. Затем, по формулам (2.2), (2.4) пересчитываются коэффициенты и свободные члены системы уравнений, как это делается в описанном ранее прямом ходе метода Гаусса.

Если определитель системы (2.1) отличен от нуля, то в прямом ходе схемы с выбором главного элемента всегда будет получена система вида (2.5), так как для главных элементов всегда будет выполняться условие (2.3). Обратный ход остается без изменения.

Возможные исходы решения анализируются после поиска каждого главного элемента и после завершения прямого хода:

1) Система имеет *бесконечное множество решений*, если при нулевом k-ом главном элементе свободные члены уравнений с k-го до n-го равны нулю или после приведения системы к треугольной форме последний коэффициент и свободный член последнего уравнения равны нулю:

$$a_{k\,k} = 0 \text{ и } a_{i\,n+1} = 0 \text{ при } i=k, k+1,\dots,n \text{ или } a_{n\,n} = 0 \text{ и } a_{n\,n+1} = 0; \tag{2.12}$$

Система *не имеет решения*, если при нулевом k-ом главном элементе хотя бы один свободный член уравнений с k-го до n-го не равен нулю или после приведения системы к треугольной форме последний коэффициент равен нулю, а свободный член последнего уравнения не равен нулю:

$$a_{k\,k} = 0 \text{ и } a_{i\,n+1} \ne 0 \text{ для } k<i<n \text{ или } a_{n\,n} = 0 \text{ и } a_{n\,n+1} \ne 0 \tag{2.13}$$

3) Система имеет *единственное решение*, если после приведения системы к треугольному виду последний коэффициент последнего уравнения отличен от нуля:

$$a_{nn} \ne 0. \tag{2.14}$$

Итак, в методе Гаусса с выбором главного элемента для системы, имеющей единственное решение, не возникает опасности деления на нуль при пересчете коэффициентов. Кроме того он **снижает вычислительную погрешность**. Это объясняется тем, что в правой части формулы (2.4) величина сомножителя m не больше единицы и модуль вычитаемого уменьшается, а следовательно снижается эффект от потери точности при выполнении операции вычитания операнда, имеющего малую точность.

2..2.3. Вычисление определителей

В прямом ходе метода Гаусса матрица заданной системы алгебраических уравнений при условии что все ведущие элементы отличны от нуля, приводятся к треугольному виду. Это достигается операциями вычитания из одних строк матрицы других строк, умноженных на некоторые коэффициенты. Как известно, определитель матрицы при таких преобразованиях матрицы остается неизменным. Для треугольной матрицы A определитель или детерминант $\det A$ равен произведению диагональных элементов в соответствие с формулой:

$$\det A = a_{11}a_{2\,2}\cdots a_{n\,n}\,. \qquad (2.15)$$

Таким образом, при решении методом Гаусса системы линейных алгебраических уравнений можно попутно вычислить определитель. Если требуется найти только определитель матрицы, то вычисления проводятся по схеме отвечающей прямому ходу метода Гаусса, с той лишь разницей, что отсутствуют действия над столбцом правых частей.

2. 3. Нормы и мера обусловленности матриц

Множество F называется линейным нормированным пространством, если оно линейно и каждому элементу $f\in F$ поставлено в соответствие число $\|f\|$, называемое нормой f и удовлетворяющее аксиомам нормы:

1) $\|f\| \ge 0$, причем $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$, т.е. f является нулевым элементом в F;

2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$ для любого действительного α;

3) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ для $f, g \in F$.

В линейном пространстве n-мерных векторов $x=(x_1, x_2,\dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ может быть введена норма двумя способами:

$$\|x\|_1 = \max_{1\le j\le n} |x_j| \qquad (2.16)$$

или

$$\|x\|_2 = (x,x)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}. \qquad (2.17)$$

~~– 11 –~~

В линейном пространстве квадратных числовых матриц n-го порядка норма матрицы задается следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad (2.18)$$

где $\|x\|$, $\|Ax\|$ – нормы соответствующих векторов x, Ax.

Заданная по формуле (2.18) норма матрицы называется *согласованной* с нормой вектора. Нормы матриц, задаваемые (2.18) и согласованные с соответствующими нормами векторов (2.16) и (2.17) определяются формулами:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \qquad (2.19)$$

$$\|A\|_2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}. \qquad (2.20)$$

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \qquad (2.21)$$

имеющую единственное решение $x \ne 0$, а следовательно $\det A \ne 0$ и $b \ne 0$. При решении системы (2.21) любым методом, в том числе методом Гаусса, вычисления производятся с округлениями. Погрешности вычислений можно интерпретировать как погрешности правой части. Наряду с системой (2.21) рассмотрим систему

$$A(x+r) = b+\eta, \qquad (2.22)$$

где η – погрешность (возмущение) правой части,

r – погрешность решения, возникающая из-за погрешность η.

Из (2.21) и (2.22) следует, что $Ar = \eta$ и $r = A^{-1}\eta$. Относительная погрешность правой части и относительная погрешность решения оцениваются отношением норм: $\frac{\|\eta\|}{\|b\|} = \frac{\|\eta\|}{\|Ax\|}$ и $\frac{\|r\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}h\|}{\|x\|}$.

Рассмотрим отношение относительной погрешности решения к относительной погрешности правой части

$$\frac{\|r\|/\|x\|}{\|\eta\|/\|b\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\frac{\|A^{-1}\eta\|}{\|\eta\|} \le \frac{\|A\|\,\|x\|}{\|x\|}\frac{\|A^{-1}\|\|\eta\|}{\|\eta\|} = \|A\|\|A^{-1}\| = \nu(A).$$

Величина

$$\nu(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| \ge \frac{\|r\|/\|x\|}{\|\eta\|/\|b\|}, \qquad (2.23)$$

называется *мерой обусловленности матрицы* A. Она равна максимально возможному коэффициенту усиления от относительной погрешности ошибки в правой части к относительной погрешности решения системы (2.21). Если величина $\nu(A)$ большая, т.е. при незначительной относительной погрешности правой части получится много большая относительная погрешность решения, то матрица A системы (2.21) называется *плохо обусловленной*, а если величина $\nu(A)$ невелика, то – *хорошо обусловленной*.

2.4. Метод прогонки

Метод прогонки применим к системам с трехдиагональной матрицей, уравнения этой системы можно представить в виде:

$$\begin{cases} a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ a_1 = 0, \quad c_n = 0, \end{cases} \qquad (2.24)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – заданные значения коэффициентов уравнений.

В прямом ходе из уравнений исключаются слагаемые $a_i x_{i-1}$. После чего уравнения обратного хода имеют вид:

$$x_i = \mu_{i+1}x_{i+1} + \eta_{i+1}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1 \qquad (2.25)$$

или

$$x_{i-1} = \mu_i x_i + \eta_i, \quad i = n+1, n, \ldots, 2,$$

где μ_i, η_i – некоторые значения коэффициентов уравнений.

Исключая x_{i-1} из (2.24), получим уравнение

$$a_i(\underbrace{\mu_i x_i + \eta_i}_{x_{i-1}}) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

из которого находим

$$x_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\mu_i}x_{i+1} + \frac{a_i\eta_i - d_i}{b_i - a_i\mu_i}. \qquad (2.26)$$

Приравнивая коэффициенты (2.25) и (2.26), получим формулы для расчета коэффициентов уравнений (2.25):

$$\mu_{i+1} = c_i/(b_i - a_i\mu_i), \qquad (2.27)$$

$$\eta_{i+1} = (a_i\eta_i - d_i)/(b_i - a_i\mu_i), \qquad (2.28)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Прямой ход метода прогонки предусматривает рекуррентный расчет коэффициентов μ_{i+1} и η_{i+1} по формулам (2.27), (2.28). Начальные значения μ_1 и η_1 могут быть любые, так как $a_1=0$.

Обратный ход метода прогонки выполняется по формулам (2.25). Значение x_{i+1} любое, так как $c_n = 0$, а следовательно $\eta_{n+1} = 0$.

Достаточное условие единственности решения системы с трехдиагональной матрицей :

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i| \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Число арифметических операций прямого хода равно $6(n\text{-}1)$. Число арифметических операций обратного хода равно $2n$. Суммарное число операций прямого и обратного хода примерно равно $8n$, что значительно меньше чем при решении произвольной системы линейных алгебраических уравнений. В методе прогонки необходимый объем памяти для матрицы коэффициентов определяется числом элементов трех диагоналей.

3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

При выполнении данной лабораторной работы используется программный комплекс обеспечивающий удобный пользовательский интерфейс для задания номера варианта, подготовки исходных данных расчета, запуска на расчет тестового примера, ввода и вывода исходных данных и результатов расчета. Выбор решаемой задачи осуществляется с помощью многоуровневого иерархического меню, имеющего всплывающие строки-подсказки. При необходимости можно воспользоваться встроенной системой контекстной помощи. Программный комплекс содержит файл с описанной интерфейсной частью модуля, который необходимо дополнить процедурами решения задач, указанных в п. 5.

4. ПОДГОТОВКА К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

При подготовки к лабораторной работе необходимо разработать программное обеспечение модулей каждой из решаемых задач, которое должно содержать следующие части:

– назначение и характеристика задачи;

– используемая информация (входная, промежуточная, нормативно- справочная) с указанием наименования, обозначения, типа данных, источника информации;

– выходная информация с указанием наименования, обозначения, типа данных, приемника информации;

– техническая сущность задачи;

– математический метод;

– схема алгоритма и ее описание;

– текст программы с подробными комментариями.

5. РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений и исследование вычислительной погрешности метода Гаусса по схеме единственного делителя.

1.1. Создать программный модуль с процедурой прямого хода метода Гаусса по схеме единственного делителя, процедурой анализа исхода прямого хода и процедурой обратного хода.

1.2. Выполнить компиляцию программы и проверить ее работу.

1.3. Задать порядок и загрузить расширенную матрицу системы линейных алгебраических уравнений для своего варианта тестового примера.

1.4. Рассчитать оценку числа вычислительных операций метода Гаусса для заданного порядка система уравнений.

1.5. Выполнить расчет корней системы с различным числом значащих цифр коэффициентов уравнений системы и построить зависимость нормы погрешности решения от числа значащих цифр.

сделать

2. Исследование вычислительной погрешности метода Гаусса по схеме с выбором главного элемента.

2.1. Создать программный модуль выбора главного элемента и перестановки строк и столбцов матрицы.

1.2. Выполнить компиляцию программы и проверить ее работу.

2.3. Выполнить расчет корней и нормы вектора погрешности системы с различным числом значащих цифр и построить зависимость нормы вектора погрешности от числа значащих цифр. Результат сравнить с данными, полученными в п.1 рабочего задания.

2.4. Провести перестановку строк и столбцов системы в соответствии с методом главного элемента и выполнить расчет по п. 2.3..

3. Расчет определителей матрицы.

3.1. Создать программный модуль для расчета определителя матрицы.

3.2. Выполнить компиляцию программы и проверить ее работу.

3.3. Рассчитать определитель матрицы для тестового примера до и после преобразования матрицы по схеме главного элемента.

4. Расчет меры обусловленности матрицы.

4.1. Создать программный модуль для расчета меры обусловленности матрицы.

4.2. Выполнить компиляцию программы и проверить ее работу.

4.3. Рассчитать меру обусловленности матрицы для тестового примера до и после преобразования по схеме главного элемента.

5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки.

5.1. Создать программный модуль с процедурами прямого и обратного хода метода прогонки.

5.2. Выполнить компиляцию программы и проверить ее работу.

5.3. Задать порядок и загрузить трехдиагональную матрицу системы линейных алгебраических уравнений для своего варианта тестового примера.

5.4. Выполнить расчет корней системы.

5.5. Рассчитать оценку числа вычислительных операций метода прогонки для заданного порядка система уравнений.

6. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

Отчет по выполненной лабораторной работе должен содержать:

– титульный лист;

– материал оформленный при подготовке к работе в соответствие с требованиями п. 4;

– результаты, полученные при выполнении каждого пункта рабочего задания с отметкой преподавателя о выполнении;