МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Автоматика и телемеханика»

# РЕШЕНИЕ НА ЭВМ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## Методические указания к курсовой работе

Москва — 1995

Р е ц е н з е н т ы :
канд. техн. наук А.И.Бернштейн (ВНИИ Гипроуглеавтоматизация),
канд. техн. наук, доцент Г.Л.Эпштейн (МГУПС)

Максимов Владислав Михайлович
Моисеев Алексей Анатольевич

РЕШЕНИЕ НА ЭВМ
СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к курсовой работе

Подписано к печати 29.03.95.
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 0,875.
Тираж 100 экз. Изд. N 1. Заказ N 427. Бесплатно

101475, Москва, А-55, ул.Образцова, 15

Типография МИИТа

## 1. ЦЕЛЬ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Целью курсовой работы является изучение методов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, их алгоритмической и программной реализации, а также анализ погрешностей этих методов.

## 2. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

### 2.1 Тема курсовой работы.

Разработка программы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

### 2.2. Исходные данные (по вариантам)

2.2.1. Метод решения. Вар. 1-3 метод Эйлера, вар. 4-6 - метод прогноза и коррекции, вар. 7-9 - модифицированный метод Эйлера, вар. 10-12 - метод Рунге-Кутта 4 порядка, вар. 13-19 - метод Адамса 2 порядка, вар. 20-25 - метод Адамса 3 порядка, вар. 26-30 - метод Адамса 4 порядка.

2.2.2. Метод выбора начальных точек в методе Адамса. Вар. 13,20,26 - метод Эйлера, вар. 14,15,21,27 - метод прогноза и коррекции, вар. 16,17,22,23,28,29 - модифицированный метод Эйлера, вар. 18,19,24,25,30 - метод Рунге-Кутта 4 порядка.

2.2.3. Точность решения. Вар. 1,4,7,10,13,16,20,26,29 - $\varepsilon$ = 0.01, вар. 2,5,8,11,14,17,21,27,30 - $\varepsilon$ = 0.05, вар. 3,6,9,12,15,19,22,28 - $\varepsilon$ = 0.005, вар. 18,23,24,25,29 - $\varepsilon$ = 0.001.

2.2.4. Способ выбора шага. Вар. 1,2,4,5,7 - переменный шаг, определяемый по верхней оценке остаточного члена, вар. 3,6,8,9,13 - постоянный шаг, выбираемый по верхней оценке остаточного члена, вар. 10-12, 14-30- постоянный шаг, выбираемый по разности двух решений, полученных с шагом $h$ и $h/2$.

2.2.5. Порядок системы. Вар. 1,3,4,6,7,9,10,12,13 - произвольный, вар. 2,5,8,11,14-16,20-23,26,27 - система 3 порядка, вар. 17-19,24,25 28-30 - система 2 порядка.

2.2.6. Характер системы : линейность и автономность (автономность - правые части системы не зависят от времени). Вар. 1,5,9,13,17,21,25,29 - нелинейная неавтономная система, вар. 2,6,10,14,18,22,26,30 - линейная неавтономная система, вар. 3,7,11,15,19,23,27 - нелинейная автономная система, вар. 4,8,12,16,20,24,28 - линейная автономная система.

2.2.7. Контрольный пример с заданной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, границами отрезка, на котором должна быть решена система, и начальными условиями в соответствии со следующими вариантами:

1. $y_1' = (-xy_1+y_2)/(x^2+1)$ , $y_2' = (-y_1-xy_2)/(x^2+1)$;
   $a=0$, $b=5$, $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$.

2. $y_1' = xy_2-x^2y_3$, $y_2' = y_3/x-xy_1$, $y_3' = x^2y_1-y_2/x$;
   $a=1$, $b=10$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$ $y_3(a)=1$.

3. $y_1' = -y_1(y_1+y_2)$, $y_2' = y_2(y_1+y_2)$;
   $a=0$, $b=5$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$.

4. $y_1' = -3y_1+48y_2-28y_3$, $y_2' = -4y_1+40y_2-22y_3$, $y_3' = -6y_1+57y_2-31y_3$;
   $a=0$, $b=3$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$ $y_3(a)=1$.

5. $y_1' = x/((y_1-y_2)(y_1-y_3))$, $y_2' = x/((y_2-y_1)(y_2-y_3))$,
   $y_3' = x/((y_3-y_1)(y_3-y_2))$;
   $a=0$, $b=10$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=2$ $y_3(a)=3$.

6. $y_1' = y_1x+y_2x^2$, $y_2' = -y_1x^2+y_2x$;
   $a=0$, $b=3$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$.

7. $y_1' = y_1(10y_2+3)$, $y_2' = y_2(6y_1+4)$;
   $a=0$, $b=5$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$.

8. $y_1' = y_2-y_3$, $y_2' = y_3+y_1$, $y_3' = y_1+y_3$;
   $a=1$, $b=10$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$, $y_3(a)=1$.

9. $y_1' = \mathrm{Sin}x/((y_1-y_2)(y_1-y_3))$, $y_2' = \mathrm{Sin}x/((y_2-y_1)(y_2-y_3))$,
   $y_3' = \mathrm{Sin}x/((y_3-y_1)(y_3-y_2))$;
   $a=0$, $b=5$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=2$, $y_3(a)=3$.

10. $y_1' = y_1\mathrm{Cos}x$, $y_2' = y_1 e^{-\sin x}$;
    $a=0$, $b=3$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$ .

11. $y_1' = -y_3+y_2$, $y_2' = y_1^2+y_2$, $y_3' = y_1^2+y_3$;
    $a=0$, $b=1$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=0$, $y_3(a)=1$.

12. $y_1' = 6y_1-72y_2+44y_3$, $y_2' = 4y_1-43y_2+26y_3$, $y_3' = 6y_1+63y_2+38y_3$;
    $a=0$, $b=2$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$, $y_3(a)=1$.

13. $y_1' = \mathrm{Cos}x/((y_1-y_2)(y_1-y_3))$, $y_2' = \mathrm{Cos}x/((y_2-y_1)(y_2-y_3))$,
    $y_3' = \mathrm{Cos}x/((y_3-y_1)(y_3-y_2))$;
    $a=0$, $b=1$, $y_1(a)=1$, $y_2(a)=2$, $y_3(a)=3$.

14. $y_1' = 2y_1/x-1$, $y_2' = -y_1/x^3+y_2/x+1/x^2$,
    $y_3' = -y_1/x^4-y_2/x^2+y_3/x+1/x^3$;
    $a=1$, $b=2$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$, $y_3(a)=1$;



15. $y_1' = -y_3y_2$, $y_2' = y_1y_3$, $y_3' = -y_1y_2/3$;
    $a=0$, $b=1$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$, $y_3(a)=1$.

16. $y_1' = 3y_2-2y_3$, $y_2' = -y_3-3y_1$, $y_3' = 2y_1-y_2$;
    $a=1$, $b=2$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$, $y_3(a)=1$.

17. $y_1' = (-2xy_1+y_2)/(4x^2+1)$, $y_2' = (-y_1-2xy_2)/(4x^2+1)$;
    $a=0$, $b=2,5$; $y_1(a)=0$, $y_2(a)=1$.

18. $y_1' = 3x-2y_2$, $y_2' = 2y_1+4$;
    $a=0$, $b=2$; $y_1(a)=0$, $y_2(a)=0$.

19. $y_1' = y_1(0.8(2y_1+3y_2)+0.6)$, $y_2' = y_2(0.9(2y_1+3y_2)+0.7)$;
    $a=0$, $b=5$; $y_1(a)=0$, $y_2(a)=0$.

20. $y_1' = y_1+y_2-y_3$, $y_2' = y_2+y_3-y_1$, $y_3' = y_3+y_1-y_2$;
    $a=1$, $b=2$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=2$, $y_3(a)=3$.

21. $y_1' = x^2/((y_1-y_2)(y_1-y_3))$, $y_2' = x^2/((y_2-y_1)(y_2-y_3))$,
    $y_3' = x^2/((y_3-y_1)(y_3-y_2))$;
    $a=0$, $b=2$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=2$, $y_3(a)=3$.

22. $y_1' = xy_2-\mathrm{Sin}x\ y_3$, $y_2' = y_3/x-xy_1$, $y_3' = \mathrm{Sin}x\ y_1-y_2/x$;
    $a=1$, $b=10$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$, $y_3(a)=1$.

23. $y_1' = y_1(y_2-y_3)$, $y_2' = y_2(y_3-y_1)$, $y_3' = y_3(y_1-y_2)$;
    $a=0$, $b=1$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=2$ $y_3(a)=3$.

24. $y_1' = 2y_2$, $y_2' = -2y_1$;
    $a=0$, $b=1$; $y_1(a)=0$, $y_2(a)=1$.

25. $y_1' = (-(x-1)y_1+y_2)/(x^2+2-2x)$, $y_2' = (-y_1-(x-1)y_2)/(x^2+2-2x)$;
    $a=3$, $b=4$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=0$.

26. $y_1' = xy_2-x^2y_3$, $y_2' = y_3\mathrm{Sin}x-xy_1$, $y_3' = x^2y_1-y_2\mathrm{Sin}x$;
    $a=1$, $b=2$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=1$, $y_3(a)=1$.

27. $y_1' = y_1(y_2^2-y_3^2)$, $y_2' = y_2(y_3^2-y_1^2)$, $y_3' = y_3(y_1^2-y_2^2)$;
    $a=0$, $b=2$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=2$, $y_3(a)=3$.

28. $y_1' = -5y_1-2y_2$, $y_2' = y_1-7y_2$;
    $a=0$, $b=5$; $y_1(a)=0$, $y_2(a)=1$.

29. $y_1' = (-xy_1/2+y_2)/(x^2/4+1)$, $y_2' = (-y_1-xy_2/2)/(x^2/4+1)$;
    $a=0$, $b=3$; $y_1(a)=1$, $y_2(a)=0$.

30. $y_1' = -y_2+x^2+6x+1$, $y_2' = y_1-3x^2+3x+1$;
    $a=0$, $b=1$; $y_1(a)=0$, $y_2(a)=0$.

## 3. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Пояснительная записка должна содержать следующие пункты:

Задание на курсовую работу.

Содержание (включает номера и наименование разделов, страницы).

Введение (содержит постановку задачи курсовой работы).

1. Назначение и характеристика программы (содержит название программы, описание использованных методов, област? применения, ограничения на возможность применения, язык программирования, объем программы и используемой памяти, точность и время решения задачи).

2. Исходные, нормативно-справочные и промежуточные данные программы (в табличной форме, содержащей наименование, обозначение, форму и точность представления, способ ввода или источник информации).

3. Результаты решения (в табличной форме, содержащей наименование, обозначение, форму и точность представления, способ вывода).

4. Математическое описание способа решения задачи.

5. Алгоритм решения задачи (содержит укрупненную схему алгоритма и пояснения к ней).

6. Текст программы с комментариями, описание программы (содержит перечень основных функциональных элементов программы, их назначение, логические и информационнные связи между ними).

7. Руководство оператора (содержит инструкцию по запуску программы, вводу исходных данных, возможные сообщения об ошибках и способы их исправления).

8. Текст контрольного примера.

9. Результат решения контрольного примера (в виде таблицы и графика).

Заключение (содержит описание основных результатов курсовой работы и выводы о сответствии их исходным данным).

Приложение.

Список использованных источников.

## 5. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

При изучении методов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений следует использовать литературные источники [1,2,3] и «Приложение» данных методических указаний.



## 6. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Пояснительная записка выполняется на листах нелинованной бумаги формата А4, рисунки и чертежи могут быть выполнены на миллиметровой бумаге. Текст пишется на одной стороне листа чернилами , тушью или пастой черного цвета. Другими цветами пользоваться не рекомендуется. По всем четырем сторонам листа должны оставаться поля (слева - 35 мм, справа - не менее 10 мм, сверху и снизу - не менее 20 мм).

Нумерация листов должна быть сквозной по всей пояснительной записке и проставляется сверху в правом углу листа. Листы с таблицами, рисунками и распечатками включаются в общую нумерацию.

Пояснительная записка должна иметь обложку и титульный лист, которые оформляются чертежным шрифтом и содержат название учебного заведения, кафедры, дисциплины, по которой выполняется курсовая работа, тему курсовой работы, шифр группы, фамилию и инициалы студента, а также должность, фамилию и инициалы консультанта.

Текстовая часть должна быть разбита на разделы, подразделы, при необходимости, пункты и подпункты. Разделы нумеруются арабскими цифрами. После цифры ставят точку и пишут название раздела прописными буквами, которое должно быть кратким и соответствовать содержанию. Перенос в словах заголовков не допускается. Точка в конце заголовка не ставится. Рекомендуется каждый новый раздел начинать с нового листа. Подчеркивание заголовков не используется.

Подразделы должны иметь порядковые номера, состоящие из номеров раздела и подраздела, разделенных точкой. Подраздел может иметь заголовок, который начинается с абзаца и пишется строчными буквами, кроме первой прописной. Расстояние между заголовком подраздела и последующим текстом - 10 мм, а между последней строкой текста подраздела и последующим заголовком - 15 мм. При нумерации пунктов и подпунтов к номеру подраздела через точку добавляются номера пунктов и подпунктов. «Введение», «Заключение» и список литературы не включаются в нумерацию разделов.

Сокращение слов в тексте не допускаются. Аббревиатура и условные обозначения требуют расшифровки в тексте. Для этого встречающиеся в первый раз в тексте аббревиатуры или условные обозначения записывают в скобках после полной расшифровки.

Формулы вписываются в текст на отдельных строках и с правой стороны листа в строке, где кончается формула, может быть поставлен арабскими цифрами ее порядковый номер в круглых скобках. Значения символов и числовых коэффициентов, входящих в формулу, разъясняются непосредственно под формулой. Расшифровка (экспликация) начинается со слова «где». При ссылке на формулу в тексте необходимо указать ее номер в круглых скобках.

Все рисунки в тексте дожны иметь название и номер. Название рисунка пишут сверху, под рисунком - сокращенное слово «Рис.», номер и подрисуночный текст, поясняющий рисунок, если он необходим.

Все таблицы в тексте должны иметь номер и заголовок. Над таблицей справа пишется слово «Таблица» и ее номер, ниже - заголовок. Заголовки граф таблицы начинаются с прописных букв, а подзаголовки - со строчных. Все заголовки и подзаголовки указываются в единственном числе. Диагональное деление граф таблицы с заголовками не допускается.

В нумерации формул, рисунков и таблиц знак N не ставится, номера подразделов, пунктов и подпунктов не включается. Нумерация содержит номера раздела и номера в разделе, разделенные точкой.

На все рисунки и таблицы должны быть ссылки в тексте в сокращенном вид. Первый раз, например, так: «на рис. 1.1», «в табл. 1.1», в последующем повторяющиеся ссылки заключаются в скобки (см. рис. 1.1), (см табл. 1.1).

Текст программы, имеющий большой объем, и рисунки, выполненные на листах формата больше чем А4, могут быть вынесены в приложение.

Список литературы для всех источников должен содержать следующие сведения: фамилию, инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц, наличие иллюстраций. Эти сведения должны быть оформлены так, как указано в выходных данных книги (см., например, список литературы данных методических указаний). Ссылки на литературу в тексте содержат номер источника, заключенный в квадратные скобки, например: [1].

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

## МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПОГРЕШНОСТИ

### 4.1. Задача Коши

Решаемая система дифференциальных уравнений обычно приводится к нормальной форме



$$\frac{dy^i}{dx} = f^i(x, y^1, y^2, \ldots, y^n) \qquad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (П.1)$$

Решение системы $n$ дифференциальных уравнений заключается в отыскании $n$ функций $y^i(x)$, удовлетворяющих системе (П.1) на отрезке $[a,b]$ и $n$ дополнительным условиям, определяющим данное частное решение. Задача решения системы дифференциальных уравнений, в которой все дополнительные условия заданы в одной точке $x = x_0$, называется *задачей Коши*. Задачу Коши всегда можно преобразовать к виду, когда точка $x_0$ совпадает с началом отрезка интегрирования $a$ и дополнительные условия имеют вид:

$$y^i(a) = y_0^i \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

где $y_0^i$ - заданные начальные значения функций $y^i(x)$.

Задача Коши решается численно, если аналитическое решение не существует либо чрезмерно трудоемко. Численные методы решения задачи Коши рассмотрим сначала для одного дифференциального уравнения первого порядка, а затем распространим их на систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть на отрезке $[a,b]$ ищется решение уравнения

$$y' = f(x,y) \qquad (П.2)$$

при начальном условии

$$y(a) = y_0, \qquad (П.3)$$

где $y_0$ - заданное число.

Разобьем $[a,b]$ на N отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, $k$=0,...,N-1. Будем последовательно для $k$=0,...,N-1 получать приближения $y_k$ к значениям функции $y(x_k)$, начиная с точки $x_0=a$, для которой известно значение функции $y_0$. Допустим, что для некоторого $k$ найдено значение $y_k$ при $x=x_k$, тогда выбирается очередной шаг $h_k=x_{k+1}-x_k$ приращения аргумента и рассчитывается приращение функции $\Delta y_k$. Приближение к значению функции $y(x_{k+1})$ находится по формулам

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \qquad (П.4)$$

$$x_{k+1} = x_k + h_k. \qquad (П.5)$$

Рекуррентные формулы (П.4) и (П.5), используемые последовательно для $k$=0,...,N-1, позволяют найти решение уравнения (П.2) при начальном условии (П.3).

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений отличаются способом вычисления приращений функций $\Delta y_k$.

### П.2. Метод Эйлера

В методе Эйлера величина $\Delta y_k$ определяется при допущении, что производная $y'(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ примерно постоянна и равна $f(x_k, y_k)$. Рекуррентная формула (П.5) для метода Эйлера имеет вид

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h_k. \qquad (П.6)$$

Для оценки погрешности метода запишем разложение решения $y(x)$ в ряд Тейлора на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h_k f(x_k, y(x_k)) + h_k^2 f'(x_k, y(x_k))/2 + \ldots \qquad (П.7)$$

Обозначим погрешность приближенного решения $\varepsilon_k = y_k - y(x_k)$. Вычитая (П.7) из (П.6), получим соотношения, связывающие погрешности в соседних узлах сетки

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + h_k(f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))) - h_k^2 f'(x_k, y(x_k))/2$$

(здесь опущены члены более высокого порядка малости).

Учитывая, что $f(x_k, y(x_k) + \varepsilon_k) - f(x_k, y(x_k)) = \varepsilon_k f_y$, где $f_y$ - частная производная функции $f(x,y)$ по $y$ в точке $(x_k, y_k)$, получим

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k(1 + h_k f_y) - h_k^2 f'(x_k, y(x_k))/2. \qquad (П.8)$$

Последовательно применяя соотношение (П.8), можно выразить погрешность на $k$ - ом шаге через $\varepsilon_0$ погрешность начальных данных

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_0 \prod_{k=1}^{N-1}(1 + h_k f_y) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} h_k^2 f'(x_k, y(x_k)) \prod_{k=1}^{N-2}(1 + h_k f_y). \qquad (П.9)$$

Рассмотрим структуру погрешности (П.9). Первое слагаемое связано с погрешностью начального значения $\varepsilon_0 = y_0 - y(x_0)$, которая умножается на ограниченную величину. Второе слагаемое обусловлено тем членом ряда Тейлора (П.7), который был отброшен при выводе формулы (П.6). Наглядное представление об этой составляющей можно получить в одном частном случае, когда $f = f(x)$ и $f_y = 0$. Погрешность метода Эйлера на одном шаге интегрирования равна

$$R = \frac{1}{2}h^2|f'| = \frac{1}{2}h^2|y''|, \qquad (П.10)$$

а на всем отрезке $[a,b]$ *оценка погрешности* метода определяется выражением

$$R \le \frac{1}{2}(a-b)hM_2, \qquad (П.11)$$

где $M_2 = \max|y''|$.

Как видно из сравнения (П.10) и (П.11), локальная погрешность (на одном шаге) зависит от $h$ в степени, на единицу большей, чем глобальная погрешность (на всем отрезке интегрирования). Таким образом, при $h \to 0$ приближенное решение сходится на ограниченном отрезке к точному с первым порядком точности, т.е. если $y(x)$ является полиномом порядка не выше первого, то метод Эйлера дает точное решение.



### П.3. Методы Рунге-Кутта

В методах Рунге-Кутта $\Delta y$ определяется как линейная комбинация значений $f(x,y)$ в нескольких точках в пределах одного шага. В табл. П.1 представлены формулы Рунге-Кутта различного порядка точности.

Таблица П.1

Некоторые методы Рунге-Кутта

| Порядок точности | Формулы метода | Оценка погрешности |
|---|---|---|
| Первый. (Метод Эйлера) | В каждой формуле $k_1 = hf(x_k, y_k)$. <br> $y_{k+1} = y_k + k_1$; | $R = \frac{1}{2}h^2\lvert y''\rvert$. |
| Второй. (Метод проб и коррекции) | $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, <br> $k_2 = hf(x_k + h, y_k + k_1)$; | $R = \frac{1}{12}h^3\lvert y'''\rvert$. |
| Второй. (Модифицир. метод Эйлера) | $y_{k+1} = y_k + k_2$, <br> $k_2 = hf(x_k + h/2, y_k + k_1/2)$; | $R = \frac{1}{24}h^3\lvert y'''\rvert$. |
| Третий порядок точности. | $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$, <br> $k_2 = hf(x_k + h/2, y_k + k_1/2)$, <br> $k_3 = hf(x_k + h, y_k + 2k_2 - k_1)$; | $R = \frac{1}{180}h^4\lvert y''''\rvert$. |
| Четвертый порядок точности. | $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, <br> $k_2 = hf(x_k + h/2, y_k + k_1/2)$, <br> $k_3 = hf(x_k + h/2, y_k + k_2/2)$, <br> $k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_3)$; | $R = \frac{1}{2880}h^5\lvert y^{(5)}\rvert$. |

Метод Рунге-Кутта первого порядка совпадает с методом Эйлера. Один из вариантов метода Рунге-Кутта второго порядка называется исправленным методом Эйлера или методом проб и коррекции, а другой вариант - модифицированным методом Эйлера.

### П.4. Методы Адамса

В методах Адамса при расчете $\Delta y$ для очередного шага используются результаты расчетов на предыдущих шагах интегрирования. Будем рассматривать $f(x,y)$ правую часть уравнения (3.2) не на всей плоскости ее аргументов $x$ и $y$, а только на определенной интегральной кривой $y(x)$, соответствующей искомому решению. Тогда она будет функцией только одного аргумента $x$; обозначим ее через

$$F(x) = f(x, y(x)).$$

Пусть нам уже известно приближенное решение в некоторых точках сетки: $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-j}$. Тогда в этих точках известны также $F(x_k)=f(x_k,y_k)$. В окрестностях этих узлов функцию $F(x)$ можно приближенно заменить интерполяционным многочленом; запишем его в форме Ньютона для неравномерной сетки:

$$F(x) = F(x_k) + (x-x_k)F(x_k,x_{k-1}) + (x-x_k)(x-x_{k-1})F(x_k,x_{k-1},x_{k-2}) + $$
$$+ (x-x_k)(x-x_{k-1})(x-x_{k-2})F(x_k,x_{k-1},x_{k-2},x_{k-3}) + \dots, \qquad (П.12)$$

где $F(x_k,x_{k-1})$, $F(x_k,x_{k-1},x_{k-2})$, $F(x_k,x_{k-1},x_{k-2},x_{k-3})$ – разделенные разности первого, второго, и третьего порядков.

Для вычисления решения в следующем узле запишем уравнение (П.2) в интегральной форме

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y(x))dx = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} F(x)dx$$

и подставим в него интерполяционный многочлен (П.12). Вместо разделенных разностей $p$-го порядка вводят для равномерной сетки обратные конечные разности $p$-го порядка

$$\nabla^p F_k = h^p p! F(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-p}) = h^p f^{(p)}$$

и после интегрирования получают *общую формулу Адамса*

$$y_{k+1} = y_k + h(F_k + \frac{1}{2}\nabla F_k + \frac{5}{12}\nabla^2 F_k + \frac{3}{8}\nabla^3 F_k + \frac{251}{720}\nabla^4 F_k + \dots). \qquad (П.13)$$

Органичиваясь одним слагаемым в скобках (П.13), получают формулу Адамса первого порядка, совпадающую с формулой Эйлера (П.6). Последовательно оставляя большее число слагаемых, получают формулу Адамса второго порядка

$$y_{k+1} = y_k + h(F_k + \frac{1}{2}\nabla F_k), \qquad (П.14)$$

формулу Адамса третьего порядка

$$y_{k+1} = y_k + h(F_k + \frac{1}{2}\nabla F_k + \frac{5}{12}\nabla^2 F_k), \qquad (П.15)$$

формулу Адамса четвертого порядка

$$y_{k+1} = y_k + h(F_k + \frac{1}{2}\nabla F_k + \frac{5}{12}\nabla^2 F_k + \frac{3}{8}\nabla^3 F_k). \qquad (П.16)$$

Обратные конечные разности выразим через значения функции $F(x)$ в узлах:

$$\nabla F_k = F_k - F_{k-1}, \quad \nabla^2 F_k = \nabla F_k - \nabla F_{k-1} = F_k - 2F_{k-1} + F_{k-2},$$
$$\nabla^3 F_k = \nabla^2 F_k - \nabla^2 F_{k-1} = F_k - 3F_{k-1} + 3F_{k-2} - F_{k-3}.$$

Тогда формулы (П.14) – (П.16) Адамса второго, третьего и четвертого порядков примут вид:

$$y_{k+1} = y_k - h(3F_k - F_{k-1})/2, \qquad (П.17)$$
$$y_{k+1} = y_k + h(23F_k - 16F_{k-1} + 5F_{k-2})/12, \qquad (П.18)$$
$$y_{k+1} = y_k + h(55F_k - 59F_{k-1} + 37F_{k-2} - 9F_{k-3})/24. \qquad (П.19)$$



Остаточные члены этих формул, определяющие погрешность методов, равны первым из отброшенных членов ряда (П.13) для формул Адамса второго, третьего и четвертого порядков соответственно:

$$R = \frac{5}{12}h|\nabla^2 F_k| = \frac{5}{12}h^3|f''| = \frac{5}{12}h^3|y'''|,$$
$$R = \frac{3}{8}h|\nabla^3 F_k| = \frac{3}{8}h^4|f'''| = \frac{3}{8}h^4|y''''|,$$
$$R = \frac{251}{720}h|\nabla^4 F_k| = \frac{251}{720}h^5|f''''| = \frac{251}{720}h^5|y^{(5)}|.$$

Особенность методов Адамса $p$-го порядка заключается в том, что начальные $p$-1 шаги должны быть выполнены каким-либо другим методом, не требующим результатов предыдущих шагов интегрирования. Рекомендуется, чтобы порядок точности этого метода был не хуже, чем в методе Адамса.

П.5. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Распространение методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на ситемы таких уравнений формально производится заменой функций $y(x)$ и $f(x,y)$ на векторные функции $\vec{y}(x)$ и $\vec{f}(x,\vec{y})$. Рассмотрим в качестве примера систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z); \\ z' = g(x,y,z), \end{cases}$$

решаемую при начальных условиях $y(a) = y_0$ и $z(a) = z_0$.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка применяется для системы уравнений по схеме, аналогичной приведенной в табл. П.1:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$
$$z_{k+1} = z_k + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4),$$

где $k_1 = hf(x_k, y_k, z_k)$; $q_1 = hg(x_k, y_k, z_k)$;

$k_2 = hf(x_k + h/2, y_k + k_1/2, z_k + q_1/2)$; $q_2 = hg(x_k + h/2, y_k + k_1/2, z_k + q_1/2)$;

$k_3 = hf(x_k + h/2, y_k + k_2/2, z_k + q_2/2)$; $q_3 = hg(x_k + h/2, y_k + k_2/2, z_k + q_2/2)$;

$k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_3, z_k + q_3)$; $q_4 = hg(x_k + h, y_k + k_3, z_k + q_3)$.

Для каждой переменной системы справедливы формулы для остаточных членов, полученные для одного уравнения. Погрешность решения системы уравнений оценивается нормой вектора оценок погрешностей составляющих.

427-100.

П.6. Контроль точности и выбор шага интегрирования

Точность метода численного интегрирования может контролироваться априорно (до выполнения расчета) по остаточному члену либо апостериорно (по результатам расчета с разными шагами интегрирования) по правилу Рунге. При контроле точности на каждом шаге используются формулы типа (П.10), а оценка погрешности на всем отрезке интегрирования выполняется с помощью формул типа (П.11). Использование формул остаточного члена требует оценки максимума модуля производных соответствующего порядка. Для этого необходимо продифференцировать правую часть уравнений. Оценка модуля производной на всем отрезке может быть определена при решении дифференциального уравнения с произвольным шагом. Затем шаг уточняется из условия заданной точности, и решение повторяется.

Для апостериорной оценки погрешности выполняются два расчета с шагом $h$ и $h/2$. Пусть в результате расчетов получены решения $y_h$ и $y_{h/2}$, а также известно, что погрешность используемого метода зависит от $h$ в степени $r$. Тогда погрешность решения определяется по правилу Рунге выражением

$$\Delta y \approx \frac{y_{h/2} - y_h}{2^r - 1}.$$

Выбор шага интегрирования осуществляется, исходя из допустимого значения погрешности. Шаг принимается либо постоянным на всем отрезке интегрирования, либо переменным, зависящим от нормы вектора производной соответствующего порядка на данном шаге.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е.А. Численные методы. -М.: Наука. 1982. -256 с.
2. Вычислительная математика / Данилина Н.И., Дубровская Н.С. Кваша О.П., Смирнов Г.В. - М.: Высш. шк., 1985. -472 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука. 1978. -512 с.

## СОДЕРЖАНИЕ



427-100.