МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра «Автоматика и телемеханика»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ЭВМ

Методические указания к лабораторной работе

Москва — 1995

Рецензенты:
канд. техн. наук А.И.Бернштейн (ВНИИ «Гипроуглеавтоматизация»),
канд. техн. наук, доцент Г.Л.Эпштейн (МГУПС).

Максимов Владислав Михайлович
Моисеев Алексей Анатольевич

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ЭВМ

Методические указания к лабораторной работе

Подписано к печати 29.03.95.
Формат 60x84 I/I6. Усл. печ. л. 0,875.
Тираж I00 экз. Изд. N 2. Заказ N 426. Бесплатно

I0I475, Москва, А-55, ул.Образцова, I5
Типография МИИТа

I.ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является изучение методов численного интегрирования функций одной переменной, алгоритмической и программной реализации этих методов, а также анализ погрешностей методов численного интегрирования.

2. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ИХ ПОГРЕШНОСТИ

2.I. Постановка задачи

Под *численным интегрированием* понимается определение приближенного численного значения I определенного интеграла

$$I \approx J = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

от заданной функции $f(x)$ на заданном отрезке $[a,b]$. Численное интегрирование используется, когда аналитическое вычисление первообразной от функции $f(x)$ невозможно или слишком сложно для практического применения. Операция нахождения определенного интеграла называется *квадратурой*, а формулы численного интегрирования - квадратурными.

Разность $\varepsilon = I - J$ между приближенным и точным значением интеграла называется *погрешностью численного интегрирования*. Поскольку определить величину погрешности интегрирования можно лишь зная точное значение искомого интеграла, на практике обычно используют *оценку погрешности* $\Delta \geq \max|\varepsilon|$, определяемую выбранным методом интегрирования и функцией $f(x)$.

Порядком точности квадратурной формулы называется наибольший порядок полинома $f(x)$, для которого квадратурная формула является точной.

2.2. Простейшие квадратурные формулы

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на n отрезков длины $h=(b-a)/n$ с границами $x_0=a, x_1=a+h, x_2=a+2h, \ldots, x_{n-1}=b-h, x_n=b$ и рассмотрим интеграл (I) как сумму n *частичных* интегралов

$$J = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \,. \qquad (2)$$

Отрезки $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2], \ldots,$ $[x_{n-1},x_n]$ называются *шагами интегрирования*, а величина h - *длиной шага интегрирования*.

При достаточно малом h можно пренебречь изменением функции $f(x)$ в пределах каждого из отрезков $[x_i,x_{i+1}]$ и принять $f(x) \approx f(x_i)$ или $f(x) \approx f(x_{i+1})$. Обозначив $f_i = f(a+ih)$, сумму (2) можно переписать в виде

$$I = hf_0+hf_1+\ldots+hf_{n-1}=h\sum_{i=0}^{n-1} f_i \quad (3)$$

или

$$I = hf_1+hf_2+\ldots+hf_n=h\sum_{i=1}^{n} f_i . \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) называют формулами *правых и левых прямоугольников*, так как каждый из частичных интегралов в сумме (2) заменяется площадью прямоугольника с высотой, равной значению подинтегральной функции на правой или левой границе шага интегрирования соответственно.

Оценка методической погрешности формул правых и левых прямоугольников определяется интегрированием разложениея подинтегральной функции на шаге интегрирования в *ряд Тэйлора* в окрестности точки x_i. На каждом i-м шаге интегрирования погрешность этих квадратурных формул оценивается величиной $\Delta_i=h^2 f'_{max}/2$, а на всем отрезке $[a,b]$, состоящем из n шагов,

$$\Delta = \frac{b-a}{2}hf'_{max}, \quad (5)$$

где f'_{max} – максимальное по абсолютной величине значение производной функции $f(x)$ на отрезке интегрирования.

Более точный результат можно получить, приняв в качестве приближенного значения функции на шаге интегрирования значение подинтегральной функции в середине шага интегрирования. При этом приближенное значение интеграла выражается формулой *средних прямоугольников*

$$I = hf_{1/2}+hf_{3/2}+\ldots+hf_{n-1/2}=h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} , \quad (6)$$

где $f_{i+1/2} = f(a+ih+h/2) = f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$. Погрешность от замены $f(x)$ константой определяется интегрированием разложения $f(x)$ в ряд Тэйлора в окрестности *середины* шага интегрирования и оценивается величиной $\Delta_i=f''_{max}h^3/24$. *Оценка погрешности* формулы средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a,b]$ определяется суммированием погрешностей на n шагах и равна

$$\Delta = \frac{b-a}{24}h^2 f''_{max}, \quad (7)$$

где f''_{max} -максимальное по абсолютной величине значение второй производной $f(x)$ на отрезке интегрирования.

Из (7) видно, что формула средних прямоугольников имеет первый порядок точности, т.е. является точной для полинома первого порядка, для которого $f''=0$.

Другим способом повышения точности является переход от кусочно-постоянной к кусочно-линейной аппроксимации функции $f(x)$. Величина частного интеграла $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ принимается равной площади трапеции с высотой h и основаниями f_i и f_{i+1}. Суммирование частичных интегралов дает *формулу трапеций*:

$$I = \frac{h}{2}(f_0+2f_1+\ldots+2f_{n-1}+f_n)= \frac{h}{2}(f_0+2\sum_{i=1}^{n-1} f_i+f_n). \quad (8)$$

Оценка погрешности формулы трапеций на i-м шаге определяется интегрированием погрешности линейной интерполяции и равна $\Delta_i=f''_{max}h^3/12$. Погрешность на отрезке интегрирования $[a,b]$ определяется суммированием частичных погрешностей на n шагах и оценивается величиной

$$\Delta = \frac{(b-a)h^2 f''_{max}}{12} . \quad (9)$$

Более высокую точность интегрирования можно получить, используя интерполяционные многочлены второй и бóльших степеней. Объединяя слагаемые в формуле (2) попарно (при четном n) и заменяя $f(x)$ ее приближением полиномом 2 порядка, после интегрирования и суммирования получим *формулу Симпсона*

$$I = \frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+ 4f_3+\ldots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n). \quad (10)$$

Оценка погрешности формулы Симпсона определяется величиной

$$\Delta = \frac{b-a}{180}h^4 f^{IV}_{max} , \quad (11)$$

где f^{IV}_{max} – максимальное по абсолютной величине значение четвертой производной $f(x)$.

Формула Уэддля. Используя n, кратное 6, разобьем интеграл (1) на слагаемые вида $\int_{x_{6i-6}}^{x_{6i}} f(x)dx$. Заменив подинтегральную функцию $f(x)$ в шести смежных узлах сетки интерполяционным полиномом Лагранжа и проинтегрировав его, получим приближение

$$\int_{x_{6i-6}}^{x_{6i}} f(x)dx \approx \frac{3h}{10}(f_{6i-6}+5f_{6i-5}+f_{6i-4}+6f_{6i-3}+f_{6i-2}+5f_{6i-1}+f_{6i}). \quad (12)$$

Суммируя полученные частичные интегралы при $i=1,2,\ldots n/6$, получим формулу Уэддля

$$I = \frac{3h}{10}(f_0+5f_1+f_2+6f_3+f_4+5f_5+2f_6+5f_7+\ldots+f_{n-2}+5f_{n-1}+f_n). \qquad (13)$$

Оценка погрешности формулы Уэддля определяется формулой

$$\Delta = \frac{47(b-a)}{12600}h^6 f^{VI}_{max} \qquad (14)$$

где f^{VI}_{max} – максимальное по абсолютной величине значение шестой производной интегриуемой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Квадратурная формула Эйлера. Учет первых производных на границах отрезка интегрирования позволяет повысить точность формулы трапеций. Заменяя в выражении для погрешности формулы трапеции вторую производную разностью первых производных деленной на шаг, получим формулу для погрешности на i – ом шаге в виде

$$\Delta_i = \frac{h^3}{12}f''_i = \frac{h^2}{12}(f'_i-f'_{i+1}).$$

Суммируя погрешность на всем отрезке $[a,b]$ с формулой трапеций, получим формулу Эйлера

$$I = \frac{h}{2}(f_0+2f_1+\ldots+2f_{n-1}+f_n) + \frac{h^2}{12}(f'_0-f'_n). \qquad (15)$$

Оценка погрешности формулы Эйлера

$$\Delta = \frac{b-a}{720}h^4 f^{IV}_{max} \qquad (16)$$

имеет тот же порядок точности , но по абсолютной величине в 8 раз меньше по сравнению с погрешностью формулы Симпсона (11).

Если для определения f'_0 и f'_n воспользоваться формулами численного дифференцирования, то получающиеся при этом формулы называются *формулами Грегори.* Для формул численного дифференцирования $f'_0=-(1,5f_0-2f_1+0,5f_2)/h$ и $f'_n=(1,5f_n-2f_{n-1}+0,5f_{n-2})/h$ формула Грегори будет иметь тот же поядок точности, что и у формулы Эйлера, но с большим коэффициентом

$$\Delta = \frac{19}{720}(b-a)h^4 f^{IV}_{max} \qquad (17)$$

Если воспользоваться простейшими формулами численного дифференцирования $f'_0=-(f_0-f_1)/h$ и $f'_n=(f_n-f_{n-1})/h$, то порядок точности понизится на единицу.

Если уточнить формулу Эйлера, учтя ее погрешность, то получится *формула Эйлера-Маклорена*

$$I = \frac{h}{2}(f_0+2f_1+\ldots+2f_{n-1}+f_n) + \frac{h^2}{12}(f'_0-f'_n). - \frac{h^4}{720}(f'''_0-f'''_n). \qquad (18)$$

Оценка погрешности формулы Эйлера-Маклорена

$$\Delta = \frac{b-a}{30240}h^6 f^{VI}_{max}. \qquad (19)$$

Порядок точности этой формулы на две больше точности формулы Эйлера.

2.3. Практическая оценка погрешности квадратурных формул

Правило Рунге позволяет оценить погрешность квадратурной формулы по результатам вычислений интеграла с двумя различными шагами интегрирования. Пусть имеется квадратурная формула n – го порядка точности, при этом погрешность пропорциональна $n+1$ – ой степени h. Тогда, выполнив расчет квадратуры с шагом интегрирования $h_1=h$ и $h_2=2h$, можно записать два равенства

$$J = I_n(h_1) + \alpha h_1^{n+1}+\ldots;$$
$$J = I_n(h_2) + \alpha h_2^{n+1}+\ldots,$$

где J – значение интеграла с учетом состалящих более высокого порядка малости ;

$I_n(h_1)$, $I_n(h_2)$ – значения интеграла, вычисленные с шагом $h_1=h$ и $h_2=2h$ по формуле n – го порядка точности;

α – коэффициент пропорциональности.

Решая эти уравнения, получим формулу для погрешности

$$\alpha h^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}-1}\Big[I_n(h) - I_n(2h)\Big]. \qquad (20)$$

При необходимости можно уточнить значение интеграла и получить новую квадратурную формулу

$$J \approx I_{n+1}(h) = I_n(h) + \alpha h^{n+1} = \Big[2^{n+1}I_n(h) - I_n(2h)\Big]/(2^{n+1}-1),$$

где $I_{n+1}(h)$ – квадратурная формула $n+1$ – го порядка точности.

Если $I_n(h)$ – определить по формуле трапеции, то $I_{n+1}(h)$ будет совпадать с формулой Симпсона.

Процесс Эйткена позволяет оценить погрешность и уточнить значение интеграла по результатам расчетов с тремя различными шагами интегрирования для квадратурной формулы, если порядок точности ее не известен. Выберем три сетки с шагами $h_1=h$, $h_2=2h$, $h_3=4h$. Обозначим приближенное значение интеграла на k – ой сетке через $I(h_k)$ и ограничимся главным членом погрешности, тогда можно составить систему из трех уравнений

$$J \approx I(h_k) + \alpha h_k^p, \quad k = 1,2,3.$$

Решая эту систему, находим оценку погрешности

$$\alpha h_1^p = \Big[I(h_1) - I(h_2)\Big]^2 \Big/ \Big[2I(h_2) - I(h_1) - I(h_3)\Big]. \qquad (21)$$

и уточненное значение интеграла

$$J \approx I(h_1) + \Big[I(h_1) - I(h_2)\Big]^2 \Big/ \Big[2I(h_2) - I(h_1) - I(h_3)\Big]. \qquad (22)$$

При необходимости можно определить порядок точности исходной формулы

$$p \approx (\ln 2)^{-1} \ln \left[I(h_3) - I(h_2) \right] / \left[I(h_2) - I(h_1) \right]. \qquad (23)$$

Методом Рунге и процессом Эйткена можно пользоваться многократно для повышения точности расчета.

2.4. Интерполяционные методы

Для гладких функций, имеющих непрерывные производные высокого порядка, можно уменьшить число узлов, необходимых для достижения заданной точности, за счет повышения порядка интерполирующей функции.

Выполним в интеграле (I) замену переменных $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} u$:

$$J = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(u)du = \frac{b-a}{2} W, \qquad (24)$$

где $\varphi(u) = f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} u)$, $W = \int_{-1}^{1} \varphi(u)du$,

и представим W в виде суммы

$$W \approx H_0\varphi(u_0) + H_1\varphi(u_1) + \ldots + H_n\varphi(u_n), \qquad (25)$$

где H_i и u_i, $i=0,1,\ldots,n$ выбираются из условия строгого равенства в (25) для любой функции $\varphi(u)$, являющейся полиномом не выше некоторой степени.

По методу Ньютона-Котеса точки u_i выбираются равноотстоящими, т. е. $u_i = -1+2i/n$, а коэффициенты

$$H_i = \frac{2(-1)^{n-i}}{n\,i!\,(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)dt \qquad (26)$$

определяются интегрированием интерполяционного многочлена Лагранжа n-ой степени, равного функции $\varphi(u_i)$ при $u=u_i$. Оценка методической погрешности метода Ньютона-Котеса

$$\Delta = q_n (b-a)^{2k+1} f^{(2k)}_{max}, \qquad (27)$$

где k - целая часть от $(n+2)/2$, $f^{(2k)}_{max}$ - максимальное по абсолютной величине значение $2k$-ой производной $f(x)$ на интервале интегрирования. Значения кэффициентов H_i и q_n для n от 1 до 8 приведены в табл. 2.1

Для повышения точности, как и в простейших квадратурных методах, интервал интегрирования $[a,b]$ может быть разбит на несколько отрезков, к каждому из которых применяется метод Ньютона-Котеса. Следует отметить, что методы Ньютона-Котеса порядков I и 2 при этом сводятся к методам трапеций и Симпсона соответственно.

Таблица 2.I

Коэффициенты метода Ньютона-Котеса

n	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	q_n
1	1	1								1/12
2	1/3	4/3	1/3							1/2880
3	1/4	3/4	3/4	1/4						1/6480
4	$\frac{7}{45}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{7}{45}$					$\frac{1\cdot 10^{-1}}{193536}$
5	$\frac{19}{144}$	$\frac{75}{144}$	$\frac{50}{144}$	$\frac{50}{144}$	$\frac{75}{144}$	$\frac{19}{144}$				$\frac{11\cdot 10^{-5}}{378}$
6	$\frac{41}{420}$	$\frac{216}{420}$	$\frac{27}{420}$	$\frac{272}{420}$	$\frac{27}{420}$	$\frac{216}{420}$	$\frac{41}{420}$			$\frac{1\cdot 10^{-2}}{15676416}$
7	$\frac{751}{8640}$	$\frac{3577}{8640}$	$\frac{1323}{8640}$	$\frac{2989}{8640}$	$\frac{2989}{8640}$	$\frac{1323}{8640}$	$\frac{3577}{8640}$	$\frac{751}{8640}$		$\frac{167\cdot 10^{-9}}{62}$
8	$\frac{989}{11175}$	$\frac{5888}{11175}$	$\frac{-928}{11175}$	$\frac{10496}{11175}$	$\frac{-4540}{11175}$	$\frac{10496}{11175}$	$\frac{-928}{11175}$	$\frac{5888}{11175}$	$\frac{989}{11175}$	$\frac{37\cdot 10^{-12}}{62}$

По методу Чебышева u_i выбираются таким образом, чтобы все H_i были равны между собой: $H_i = H$, $i=0,1,\ldots n$, что обеспечивает минимальное влияние неточности исходных данных на погрешность интегрирования. Если $\varphi(u)$ - полином степени $n+1$, $\varphi(u) = a_{n+1}u^{n+1} + a_n u^n + \ldots + a_0$, точное равенство в (25) примет вид

$$W = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \int_{-1}^{+1} u^k du = H\sum_{i=0}^{n} (a_{n+1}u_i^{n+1} + a_n u_i^n + \ldots + a_0),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при a_0, получим $H = 2/(n+1)$, а для определения $n+1$ значения u_i нужно найти решения системы из $n+1$ уравнений

$$H\sum_{i=0}^{n} u_i^k = \int_{-1}^{+1} u^k du = \left(1+(-1)^k\right)/(k+1), \quad k=1,2\ldots,n+1, \qquad (28)$$

которая получается приравниванием оставшихся коэффициентов при a_k.

Система (28) имеет $n+1$ вещественных корней для $n \le 8$. Значения u_i, получаемые из системы (28), приведены в табл. 2.2 вместе с оценками методической погрешности для каждого n. Так как система (28) при n более 8 имеет в решении комплексные числа, дальнейшее повышение точности достигается только дроблением интервала интегрирования на более мелкие отрезки.

По методу Гаусса в качестве u_i выбираются корни полинома Лежандра степени $n+1$

$$P_{n+1} = \frac{d^{n+1}(u^2-1)^{n+1}}{du^{n+1}},$$

что позволяет значительно уменьшить погрешность интегрирования.

Таблица 2.2

Коэффициенты метода Чебышева

n	H	u_i	Δ
1	1	±0,57735026	$\frac{1}{180}\frac{1}{4!}(b-a)^5\varphi^{IV}_{max}$
2	2/3	±0,70710678 0	$\frac{1}{480}\frac{1}{4!}(b-a)^5\varphi^{IV}_{max}$
3	1/2	±0,79465448 ±0,18759248	$\frac{1}{3780}\frac{1}{6!}(b-a)^7\varphi^{VI}_{max}$
4	2/5	±0,83248748 ±0,37454144 0	$\frac{1}{7444}\frac{1}{6!}(b-a)^7\varphi^{VI}_{max}$
5	1/3	±0,86624682 ±0,42251866 ±0,26663540	$\frac{1}{50400}\frac{1}{8!}(b-a)^9\varphi^{(8)}_{max}$
6	2/7	±0,88386170 ±0,52965678 ±0,32391182 0	$\frac{1}{88552}\frac{1}{8!}(b-a)^9\varphi^{(8)}_{max}$
8	2/9	±0,91158930 ±0,60101866 ±0,52876178 ±0,16790618 0	$\frac{1}{822180}\frac{1}{10!}(b-a)^{11}\varphi^{(X)}_{max}$

Коэффициенты H_i определяются в путем интегрирования интерполяционного полинома Лежандра, проведенного через узлы интерполяции $(u_i, \varphi(u_i))$. Значения корней полинома Лежандра u_i, соответствующих им коэффициентов H_i и оценок методических погрешностей для n от I до 8 приведены в табл. 2.3. Метод Гаусса является наиболее точным из трех рассмотренных методов.

Следует отметить, что погрешность задания значений аргумента в узлах интерполяции u_i приводит к погрешности вычисления определенного интеграла, приближенно равной $H_i f'(u_i)\Delta_u$, где Δ_u – погрешность задания аргумента. Названная погрешность определяет требования к точности вычисления корней полинома Лежандра в методе Гаусса.

3.ПОДГОТОВКА К РАБОТЕ

3.I. Описать заданные математические методы численного итегрирования с простейшими и интерполяционными квадратурными формулами и формулы оценки их погрешности для своего варианта, приведенного в табл. 3.I.

3.2. Рассчитать и построить зависимость оценки погрешности от шага интегрирования.

3.3. Описать способы выбора шага для своего варианта, приведенного в табл. 3.I.

3.4. Разработать алгоритмы и программы численного интегрирования для выполнения пунктов 4.2 - 4.5.

Таблица 2.3

Коэффициенты метода Гаусса

n	u_i	H_i	Δ
1	±0,577350269188	1	$\frac{1}{180}\frac{1}{4!}(b-a)^5\ \varphi^{(4)}_{max}$
2	±0,774596669240 0	5/9 8/9	$\frac{1}{2800}\frac{1}{6!}(b-a)^7\ \varphi^{(6)}_{max}$
3	±0,861136311594 ±0,339981043784	0,347854845136 0,652145154862	$\frac{1}{44100}\frac{1}{8!}(b-a)^9\ \varphi^{(8)}_{max}$
4	±0,906179845938 ±0,538469310104 0	0,236926885056 0,478628670498 512/900	$\frac{1}{689544}\frac{1}{10!}(b-a)^{11}\varphi^{(10)}_{max}$
5	±0,932469514202 ±0,661209386466 ±0,238619186082	0,171324492378 0,360761573048 0,467913934572	$\frac{1}{11099088}\frac{1}{12!}(b-a)^{13}\varphi^{(12)}_{max}$
6	±0,949107912342 ±0,741531185598 ±0,405845151376 ±0	0,129484966168 0,279705391488 0,381830050504 0,417959183672	$\frac{1}{176679360}\frac{1}{14!}(b-a)^{15}\varphi^{(14)}_{max}$
7	±0,960289856496 ±0,796666477412 ±0,525532409916 ±0,183434642494	0,101228536290 0,222381034452 0,313706645876 0,362683783378	$\frac{1}{2815827300}\frac{1}{16!}(b-a)^{17}\varphi^{(16)}_{max}$
8	±0,968160239506 ±0,836031107326 ±0,613371432700 ±0,324253423402 0	0,081274388361 0,180648160649 0,260610696402 0,312347077040 0,330239355001	$\frac{1}{44914183600}\frac{1}{18!}(b-a)^{19}\varphi^{(18)}_{max}$

4.РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

4.I. Ввести и отладить разработанную программу численного интегрирования с использованием простейших квадратурных формул.

4.2. При допустимой погрешности 0,001 рассчитать значения определенного интеграла, число шагов интегрирования, количество использованных значений интегрируемой функции, фактическую погрешность, оценку погрешности и шаг интегрирования.

4.3. Исследовать методическую погрешность. Повторить пункт 4.2, увеличив и уменьшив вдвое заданную погрешность, а затем и шаг интегрирования.

Таблица 3.1

Исходные данные задания

Вар.	Простейшая формула	Выбор шага	Интерполяционная формула, ее порядок (n)	$f(x)$	$[a,b]$
I	Сред.прям.	По оценке	Ньютона-Котеса,5	Sin 2x	0;π/2
2	Трапеций	Пр. Рунге	Ньютона-Котеса,6	Cos 3x	0;π/3
3	Симпсона	Пр. Эйткена	Ньютона-Котеса,7	exp(-x/2)	0; 5
4	Уэддля	По оценке	Чебышева, 5	Ln x	1; e
5	Эйлера	Пр. Рунге	Чебышева, 6	Sh 2x	-1;1
6	Грегори	Пр. Эйткена	Чебышева, 8	Ch 3x	-1;1
7	Эйл.-Макл.	По оценке	Гаусса, 4	$1/x^2$	1;10
8	Сред.прям.	Пр. Рунге	Гаусса, 5	$1/x^3$	1;5
9	Трапеций	Пр. Эйткена	Гаусса, 6	Sin 2x	0;π/2
I0	Симпсона	По оценке	Гаусса, 7	Cos 3x	0;π/3
II	Уэддля	Пр. Рунге	Ньютона-Котеса,5	exp(-x/2)	0; 5
I2	Эйлера	Пр. Эйткена	Ньютона-Котеса,6	Ln x	1; e
13	Грегори	По оценке	Ньютона-Котеса,7	Sh 2x	-1;1
14	Эйл.-Макл.	Пр. Рунге	Чебышева, 5	Ch 3x	-1;1
15	Сред.прям.	Пр. Эйткена	Чебышева, 6	$1/x^2$	1;10
16	Трапеций	По оценке	Чебышева, 8	$1/x^3$	1;5
17	Симпсона	Пр. Рунге	Гаусса, 4	Sin 2x	0;π/2
18	Уэддля	Пр. Эйткена	Гаусса, 5	Cos 3x	0;π/3
19	Эйлера	По оценке	Гаусса, 6	exp(-x/2)	0; 5
20	Грегори	Пр. Рунге	Гаусса, 7	Ln x	1; e
2I	Эйл.-Макл.	Пр. Эйткена	Ньютона-Котеса,5	Sh 2x	-1;1
22	Сред.прям.	По оценке	Ньютона-Котеса,6	Ch 3x	-1;1
23	Трапеций	Пр. Рунге	Ньютона-Котеса,7	$17x^2$	1;10
24	Симпсона	Пр. Эйткена	Чебышева, 5	$1/x^3$	1;5
25	Уэддля	По оценке	Чебышева, 6	Sin 2x	0;π/2
26	Эйлера	Пр. Рунге	Чебышева, 8	Cos 3x	0;π/3
27	Грегори	Пр. Эйткена	Гаусса, 4	exp(-x/2)	0; 5
28	Эйл.-Макл.	По оценке	Гаусса, 5	Ln x	1; e
29	Сред.прям.	Пр. Рунге	Гаусса, 6	Sh 2x	-1;1
30	Трапеций	Пр. Эйткена	Гаусса, 7	Ch 3x	-1;1

4.4. Исследовать погрешность от исходных данных. Внести в программу изменения, ограничивающие точность задания интегрируемой функции тремя цифрами после запятой, и повторить пункт 4.2.

4.5. Исследовать вычислительную погрешность. Внести в программу изменения, моделирующие вычисления с четырьмя значашими цифрами. Экспериментально определить значение шага, при котором начинает сказываться вычислительная погрешность.

4.6. Ввести и отладить разработанную программу численного интегрирования с использованием инерполяционных квадратурных формул.

4.7. Рассчитать значения определенного интеграла, фактическую погрешность и оценку погрешности.

4.8. По результатам расчетов построить зависимости погрешности от шага интегрирования. Сравнить результаты расчетов с

полученными в п.3.2.

5. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист;
- назначение и характеристику разрабатываемой программы;
- математическое описание способа решения задачи;
- таблицы идентификаторов входных, промежуточных и выходных величин;
- схему алгоритма и ее описание;
- текст программы с коментариями;
- результаты расчетов с отметкой преподавателя о выполнении лабораторной работы;
- графики полученных зависимостей.

6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

При изучении методов численного интегрирования и подготовке к лабораторной работе следует использовать литературные источники [I,2,3] и данные методические указания.

Для каждого варианта исходных данных в табл. 3.1 задана одна из так называемых простейших квадратурных формул и одна интерполяционная квадратурная формула, которые должны быть использованы для построения двух программ численного интегрирования. В качестве простейших квадратурных формул использованы формулы средних прямоугольников, трапеций, Симпсона, Уэддля, Эйлера, Грегори и Эйлера-Маклорена, а в качестве интерполяционных - формулы Ньютона-Котеса, Чебышева и Гаусса, которые рассмотрены в п.2. Там же даны формулы для оценки погрешности по остаточному члену, правило Рунге и процесс Эйткена.

При выполнении п. 3.1 необходимо привести расчетные фромулы заданных методов с описанием всех входящих величин и дать необходимые пояснения по их применению.

При составлении программы численного интегрирования следует обратить внимание на точность задания пределов, особенно, если они заданы иррациональными числами π=3.I4I593 и e=2.7I828I8. Кроме этого в программе необходимо обеспечить, чтобы интегрирование выполнялось строго в заданных пределах. Этого можно достичь, выбирая шаг интегрирования кратным длине отрезка [a,b] или выбирая длину последнего шага так, чтобы его конец совпадал с концом отрезка интегрирования.

426-100

ЛИТЕРАТУРА

I. Волков Е.А. Численные методы. -М.: Наука, 1982. -256 с.

2. Вычислительная математика / Данилина Н.И., Дубровская Н.С. Кваша О.П., Смирнов Г.В. - М.: Высш. шк., 1985. -472 с.

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. -512 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ... 3
2. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ИХ ПОГРЕШНОСТИ 3
3. ПОДГОТОВКА К РАБОТЕ.................................... I0
4. РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ.. II
5. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ............ I3
6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ... .... I3
Л И Т Е Р А Т У Р А.. I4

426-100

1. ОВМ

2. МОТС а/ курсач
б/ Динамика

3. МОМВ
№5 инд. и пр
№6 инд. и пр