МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра «Автоматика и телемеханика»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ЭВМ

Методические указания к лабораторной работе

Москва — 1995

Рецензенты:
д.т.н., с.н.с. Абрамов В.М. (ВНИИЖТ);
к.т.н., с.н.с. Бернштейн А.И. (ВНИИ «Гипроуглеавтоматизация»).

Максимов Владислав Михайлович
Моисеев Алексей Анатольевич

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ЭВМ
Методические указания к лабораторной работе

Подписано к печати 29.03.95.
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Изд. N 3. Заказ N 432. Бесплатно

101475, Москва, А-55, ул.Образцова, 15
Типография МИИТа

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является изучение методов численного дифференцирования, анализ методической погрешности и погрешности от неточности исходных данных, определение оптимального шага численного дифференцирования, а также разработка программ для численного дифференцирования и расчета погрешности.

2. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

2.1. Формулы численного дифференцирования

Под *численным дифференцированием* понимается вычисление приближенного численного значения производной от заданной функции $f(x)$. Численное дифференцирование используется, когда аналитическое вычисление производной либо слишком сложно для практического применения, либо невозможно, если функция задана таблично.

Для получения *формул численного дифференцирования* функции $y(x)$ выбирают аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$, дифференцируют ее, а затем по известным значениям функции $y(x)$ в некоторых точках x_i рассчитывают значения производных.

Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона

$$\varphi(x)=y(x_0)+\xi_0 y(x_0,x_1)+\xi_0\xi_1 y(x_0,x_1,x_2)+\xi_0\xi_1\xi_2 y(x_0,x_1,x_2,x_3)+\ldots,$$

где $y(x_0,x_1)$, $y(x_0,x_1,x_2)$, $y(x_0,x_1,x_2,x_3),\ldots$ – разделенные разности первого, второго, третьего и т.д. порядков, x_i – значения аргумента в *узлах интерполяции*, $\xi_i=x-x_i$ – расстояние от узла интерполяции x_i до точки x, в которой рассчитывается производная.

Продифференцировав k раз функцию $\varphi(x)$, получим формулу для k-ой производной в виде ряда

$\sum (x-x_i)$

$$y^{(k)}(x)\approx\varphi^{(k)}(x)=k!\Big[y(x_0,x_1,\ldots,x_k)+y(x_0,x_1,\ldots,x_{k+1})\sum_{i=0}^{k}\xi_i+$$

$$+y(x_0,x_1,\ldots,x_{k+2})\sum_{j>i\geq 0}^{k+1}\xi_i\xi_j+y(x_0,x_1,\ldots,x_{k+3})\sum_{l>j>i\geq 0}^{k+2}\xi_i\xi_j\xi_l+\ldots\Big]. \quad (I)$$

Ограничивая ряд (I) некоторым числом слагаемых, получим приближенное выражение для соответствующей призводной.

2.2. Погрешность численного дифференцирования

Погрешность численного дифференцирования состоит из методической погрешности (погрешности формул), погрешности от неточности исходных данных и вычислительной погрешности.

Погрешность формул численного дифференцирования определяется модулем первого отброшенного члена ряда (I). Пусть использованы узлы x_i, $0 \geq i \geq n$, всего $n+I$ узел. Тогда первый отброшенный член равен по абсолютной величине

$$R_n^{(k)} = |k!\, y(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \sum_{l>j>\ldots>i\geq 0}^{n} \xi_l \xi_j \ldots \xi_i|.$$

Учитывая, что разделенная разность $y(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$, как показано ниже, приближенно равна $y^{(n+1)}(x)/(n+1)!$, *оценка погрешности* формулы численного дифференцирования имеет вид:

$$R_n^{(k)} \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1-k)!} \xi_{max}^{n+1-k},$$

где $M_{n+1} = \max_i |y^{(n+1)}|$, $\xi_{max} = \max_i |\xi_i|$.

Значение x, при котором выполняется условие $R_n^{(k)}=0$, называется *точкой повышенной точности*. Условие повышенной точности удовлетворяется, например, если узлы сетки x_i расположены симметрично относительно x. В точках повышенной точности погрешность определяется следующим отброшенным членом формулы численного дифференцирования (I).

Погрешность от исходных данных возникает при использовании в расчетах значений дифференцируемой функции в узлах интерполяции, вычисленных или измеренных с некоторой погрешностью. Если y_i – точное, а $\tilde{y}_i$ – приближенное значение функции $y(x)$ в узле x_i, погрешность в i-ом узле интерполяции обозначим через $\Delta_i = \tilde{y}_i - y_i$. Поскольку разделенные разности линейно зависят от y_i, погрешность от иссходных данных можно получить, заменяя y_i в формуле (I) на Δ_i. Для практических целей используют *оценку погрешности от исходных данных*, получаемую заменой Δ_i на $\Delta_{max} = \max_i |\Delta_i|$ и равную

$$r^{(k)} \leq \Delta_{max} \Big[k!\, \gamma(x_0, x_1, \ldots, x_k) + (k+1)!\, \gamma(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) \xi_{max} +$$
$$+ (k+2)!\, \gamma(x_0, x_1, \ldots, x_{k+2}) \xi_{max}^2 + (k+3)!\, y(x_0, x_1, \ldots, x_{k+3}) \xi_{max}^3 + \ldots \Big],$$

где $\gamma(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \left| \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\prod_{j=0, j\neq i}^{j=k} (x_j - x_i)} \right|$ – коэффициенты при y_i в разделенных разностях. Число удерживаемых слагаемых в формуле погрешности от исходных данных равно числу слагаемых в

используемой формуле численного дифференцирования.

Вычислительная погрешность возникает при выполнении арифметических операций с ограниченным числом разрядов за счет округления результата. При небольшом числе операций в формулах численного дифференцирования и значительном числе разрядов вычислительной погрешностью можно пренебречь.

Все приведенные выше формулы применимы для произвольного, в том числе неравномерного, расположения узлов интерполяции.

2.3 Дифференцирование с постоянным шагом. Выбор оптимального шага

Простейшие формулы численного дифференцирования получаются, если оставить в них только первый член:

$$y^{(k)}(x) \approx k!\, y(x_0, x_1, \ldots, x_k). \qquad (2)$$

Первый отброшенный член, определяющий погрешность простейших формул численного дифференцирования, равен по модулю

$$R_n^{(k)} = \left| \sum_{i=0}^{k} (x - x_i)\, y(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) \right|,$$

и зависит от значения x. В точке повышенной точности $\sum_{i=0}^{k} (x - x_i) = 0$ и погрешность определяется следующим членом ряда (I):

$$R_{n+1}^{(k)} = \left| \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=i}^{k+1} (x - x_j)(x - x_i)\, y(x_0, x_1, \ldots, x_{k+2}) \right|,$$

Погрешности простейших формул. Рассмотрим формулу для *первой производной*

$$y'(x) = y(x_0, x_1) + (\xi_0 + \xi_1)\, y(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$

При $x = x_1$ имеем $\xi_0 = x_1 - x_0 = h$, $\xi_1 = 0$. Учитывая, что $y(x_0, x_1) = (y(x_0) - y(x_1))/(x_0 - x_1)$ и $y(x_0, x_1, x_2) \approx y''/2$, получим

$$y'(x) = (y_1 - y_0)/h + h y''/2 + \ldots,$$

где первое слагаемое определяет простейшую формулу, а последующие члены есть погрешность метода. При расчете первой производной в точке $x = x_1$ по формуле

$$y'(x) = (y_1 - y_0)/h$$

оценка погрешности метода имеет вид

$$R_1^{(1)} \leq M_2 h/2,$$

где $M_2 = max|y''|$.

Погрешность от неточности исходных данных. Пусть y_0, y_1 – точные, а $\tilde{y}_0$, $\tilde{y}_1$ – приближенные значения функции $y(x)$ в точках x_0 и x_1 соответственно. Тогда

$$\tilde{y}_0 = y_0 + \Delta_0, \qquad \tilde{y}_1 = y_1 + \Delta_1,$$

где Δ_0, Δ_1 – погрешность исходных данных.

При расчете производной по приближенным данным получим приближенное значение производной

$$\tilde{y}'(x)=(\tilde{y}_1-\tilde{y}_0)/h. \qquad (3)$$

Следовательно, погрешность от неточности исходных данных равна

$$\Delta_{y'}=\tilde{y}'-y'=(\Delta_1-\Delta_0)/h.$$

Оценка погрешности от неточности исходных данных имеет вид

$$r_1^{(1)}=|\Delta_{y'}|\le max|\Delta_{y'}|=2\Delta_{max}/h,$$

где $\Delta_{max}=max_i|\Delta_i|$ – оценка погрешности исходных данных.

Оценка суммарной погрешности равна сумме оценок составляющих:

$$\Sigma r^{(1)}=R_1^{(1)}+r_1^{(1)}\le M_2h/2+2\Delta_{max}/h.$$

Пока шаг h достаточно велик, при его убывании погрешность от неточности исходных данных мала по сравнению с погрешностью метода; поэтому полная погрешность убывает. При дальнейшем уменьшении шага погрешность от неточности исходных данных становится заметной. Наконец, при достаточно малом шаге погрешность от неточности исходных данных становится преобладающей, и суммарная погрешность возрастает с ростом h. *Оптимальный шаг численного дифференцирования*, дающий минимум суммарной погрешности, определяется из условия равенства нулю частной производной суммарной погрешности по шагу h $(\partial\Sigma r^{(1)}/\partial h=0)$:

$$h_o^{(1)}=2\sqrt{\Delta_{max}/M_2},$$

а значение минимума суммарной погрешности при оптимальном шаге равно

$$(r^{(1)})_o=2\sqrt{\Delta_{max}M_2}.$$

Вторая производная определяется выражением

$$y''(x)=2![y(x_0,x_1,x_2)+(\xi_0+\xi_1+\xi_2)y(x_0,x_1,x_2,x_3)+\ldots],$$

а простейшая формула численного дифференцирования и погрешность метода для произвольной точки равны:

$$y''(x)=2y(x_0,x_1,x_2), \qquad R_2^{(2)}=2(\xi_0+\xi_1+\xi_2)y(x_0,x_1,x_2,x_3).$$

При задании исходных данных в равномерно расположенных узлах, когда $x_{i+1}-x_i=h=const$, вторая и третья разделенные разности равны $y(x_0,x_1,x_2)=(y_0-2y_1+y_2)/2h^2$, $y(x_0,x_1,x_2,x_3)\approx y'''/3!$.

Для точки $x=x_2$ очевидно, что $\xi_0=2h$, $\xi_1=h$, $\xi_2=0$, а формула численного дифференцирования и оценка погрешности метода равны:

$$y''\approx(y_0-2y_1+y_2)/h^2, \qquad R_2^{(2)}\le M_3h,$$

где $M_3\le max|y'''|$.

Погрешность от неточности исходных данных при этом равна

$$\Delta y''=\tilde{y}''-y''=(\Delta_0-2\Delta_1+\Delta_2)/2h^2.$$

Оценка погрешности от неточности исходных данных для второй

поизводной имеет вид

$$r_2^{(2)}=|\Delta_{y'}|\le max|\Delta_{y'}|=4\Delta_{max}/h^2.$$

Оценка суммарной погрешности простейшей формулы численного дифференцирования для второй производной определяется выражением

$$\Sigma r^{(2)}=R_2^{(2)}+r_2^{(2)}\le M_3h+4\Delta_{max}/h^2.$$

Оптимальный шаг численного дифференцирования и минимум суммарной погрешности определяются выражениями

$$h_o^{(2)}=2\sqrt[3]{\Delta_{max}/M_3} \quad \text{и} \quad (\Sigma r^{(2)})_o=3\sqrt[3]{\Delta_{max}M_3^2}.$$

Для простейшей формулы второй производной в точке повышенной точности при $x=x_1$ первый отброшенный член $R_2^{(2)}=0$, и погрешность метода определяется следующим членом

$$R_3^{(2)}=2!(\xi_0\xi_1+\xi_0\xi_2+\xi_0\xi_3+\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3)y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4),$$

где $\xi_0=-h$; $\xi_1=0$; $\xi_2=h$; $\xi_3=2h$; $y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)\approx y^{(4)}/4!$.

Оценка погрешности метода в точке повышенной точности

$$R_3^{(2)}\le M_4h^2/12,$$

где $M_4=max|y^{(4)}|$.

В точке повышенной точности оценка суммарной погрешности простейшей формулы численного дифференцирования для второй производной определяется выражением

$$\Sigma r^{(2)}=R_3^{(2)}+r_2^{(2)}\le M_4h^2/12+4\Delta_{max}/h^2.$$

Оптимальный шаг численного дифференцирования и минимум суммарной погрешности в этом случае определяются выражениями

$$h_o^{(2)}=2\sqrt[4]{3\Delta_{max}/M_4} \quad \text{и} \quad (\Sigma r^{(2)})_o=2\sqrt{\Delta_{max}M_4/3}.$$

2.5. Дифференцирование в реальном времени

В формулах *численного дифференцирования в реальном времени* обычно используется равномерная сетка временной дискретизации и значение производной определяется для текущего момента времени x_0. Пусть T – шаг дискретизации по времени, m – номер текущего шага дискретизации, аргумент дифференцируемой функции принимает значения

$$x_0=mT,\ x_1=(m-1)T,\ \ldots,\ x_i=(m-i)T, \qquad (4)$$

а соответствующие значения функции равны $y_0=y[m]$, $y_1=y[m-1],\ldots,y_i=y[m-i]$. Тогда разделенные разности определяются выражениями:

$$y(x_0,x_1)=\nabla y[m]/T, \qquad y(x_0,x_1,x_2)=\nabla^2y[m]/2T^2,$$
$$y(x_0,x_1,\ldots,x_k)=\nabla^k y[m]/k!T^k, \qquad (5)$$

где ∇ – набла, оператор обратных конечных разностей.

Обратные конечные разности I-го, 2-го и т.д. k-го порядков определяются рекуррентно: $\frac{1}{T}\left(y[m]-y[m-1]-y[m-1]+y[m-2]\right)$

$$\nabla y[m]=y[m]-y[m-1], \qquad \nabla^2 y[m]=\nabla y[m]-\nabla y[m-1],\ldots,$$
$$\nabla^k y[m]=\nabla^{k-1} y[m]-\nabla^{k-1} y[m-1].$$

Формула численного дифференцирования для первой производной для точки $x=mT$ определяется через обратные конечные разности выражением

$$y'[m]=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\nabla^i y[m], \quad = \frac{1}{T}\left(\nabla y[m]+\frac{\nabla^2 y[m]}{2}\right) \tag{6}$$

где n - число членов, сохраняемых в формуле.

Оценка погрешности метода находится по модулю первого отброшенного члена

$$R_n^{(1)}=\left|\frac{1}{T}\,\frac{1}{n+1}\nabla^{n+1}y[m]\right|.$$

Простейшие формулы численного дифференцирования, имеющие вид:

$$y^{(k)}=\nabla^k y[m]/T^k,$$

позволяют получать формулы для методической погрешности определенной через производные $n+1$ -го порядка

$$R_n^{(1)}=\left|\frac{T^n y^{(n+1)}}{n+1}\right| \le \frac{T^n M_{n+1}}{n+1},$$

где $M_{n+1}=max|y^{(n+1)}|$.

Дифференцирование в реальном времени обычно требует высокого быстродействия вычислений, поэтому формулы численного дифферцирования представляются в наиболее простой форме. Для этого конечные разности выражаются через значения функций в узлах, а затем приводятся подобные члены. Так например, формула (6) при $n=2$ может быть представлена в виде:

$$y'[m]=(1{,}5y[m]-2y[m-1]+0{,}5y[m-2])/T. \tag{7}$$

Кроме этого, для повышения быстродействия часто вычисления выполняются с ограниченным числом разрядов, над числами представленными в форме с фиксированной запятой (фиксированной точкой). При этом вычислительная погрешность может достигать значительной величины и должна учитываться при оценке погрешности численного дифференцирования.

3.ПОДГОТОВКА К РАБОТЕ

3.1. Вывести формулу численного дифференцирования для случаев с равноотстоящими и произвольно расположенными узлами интерполяции для своего варианта, приведенного в табл. 3.1.

3.2. Для полученных формул вывести формулы методической погрешности, погрешности от ошибки исходных данных и суммарной погрешности.

Таблица 3.1

Исходные данные задания

Вариант	$y(x)$	k	$n+1-k$		Вид формул дифференцир.	$[a,b]$
			р	п		
1	$exp(x)$	1	3	6	α	0 : 1
2	$Sin(x)$	2	2	5	β	0 : 6,28
3	$Cos(x)$	3	1	4	α	-3 : +3
4	$Ln(x)$	1	3	5	β	1 : 100
5	$Sh(x)$	2	2	4	α	-1 : 1
6	$Ch(x)$	3	1	3	β	-1 : 1
7	$exp(x)$	2	3	4	α	0 : 1,5
8	$Sin(x)$	1	3	5	β	0 : 5
9	$Cos(x)$	2	2	3	α	0 : 3,14
10	$Ln(x)$	3	2	5	β	1 : 10
11	$Sh(x)$	1	2	6	α	0 : 2
12	$Ch(x)$	2	2	5	β	0 : 1
13	$exp(x)$	3	1	6	α	0 : 1
14	$Sin(x)$	3	2	4	β	0 : 6,28
15	$Cos(x)$	1	3	6	α	-3 : -3
16	$Ln(x)$	2	2	4	β	1 : 100
17	$Sh(x)$	3	1	5	α	-1 : 1
18	$Ch(x)$	1	2	7	β	-1 : 1
19	$exp(x)$	2	1	6	α	0 : 1,5
20	$Sin(x)$	3	1	4	β	0 : 5

3.3. Рассчитать оптимальный шаг дифференцирования функции, заданной с 2 цифрами после запятой, используя аналитическую оценку максимума производной высшего порядка.

3.4. Построить графики зависимостей оценок составляющих погрешностей и суммарной погрешности от шага дифференцирования.

3.5. Разработать алгоритмы и программы численного дифференцирования и расчета оценок погрешностей необходимых для выполнеия п. 4.2-4.5 рабочего задания.

4.РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

4.1. Ввести и отладить разработанную программу.

4.2. Исследование методической погрешности. Рассчитать значение производной (по формуле для равномерного шага), оценку суммарной погрешности и фактическую погрешность в точке с максимальным ее значением в заданном диапазоне изменения аргумента при точных значениях дифференцируемой функции и оптимальном постоянном шаге дифференцирования, а также при шаге дифференцирования вдвое большем и вдвое меньшем оптимального.

4.3. Учет погрешности от неточности исходных данных. Повторить пункт 4.2, округлив значения дифференцируемой функции до сотых, и сравнить результаты с полученными в п. 4.2 и п. 3.4.

4.4. Учет вычислительной погрешности. Внести изменения в программу, имитирующие вычислительную погрешность за счет ограничения разрядности мантиссы результата до 8 битов , и повторить п.4.2.

4.5. Рассчитать значение производной (по формуле для неравномерного шага), оценку погрешности и фактическую погрешность в той же точке и с тем же шагом при точных и округленных значениях дифференцируемой функции и сравнить результаты с пп. 4.2 - 4.4.

5. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист;
- назначение и характеристику разрабатываемой программы;
- вывод расчетных формул;
- таблицы идентификаторов входных, промежуточных и выходных величин;
- схему алгоритма и его описание;
- текст программы;
- результаты расчетов с отметкой преподавателя о выполнении лабораторной работы;
- графики рассчитанных зависимостей.

6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

В табл. 3.1 заданы следующие исходные данные: дифференцируемая функция $y(x)$, порядок производной k, число слагаемых $n+1-k$ для формул с равномерным (р) и произвольным (п) шагом, диапазон изменения аргумента $[a,b]$ и вид формул дифференцирования .(α - для точек повышенной точности, β - для расчета в реальном времени).

При изучении методов численного дифференцирования и подготовке к лабораторной работе по пунктам 3.1-3.5 следует использовать литературные источники [1-4] и данные методические указания.

Вывод формулы численного дифференцирования следует выполнять в следующей последовательности:

- выписать интерполяционную формулу Ньютона;
- продифференцировать её k раз;
- сохранить заданное число членов в выражении для производной.

Полученное выражение будет формулой (1) для k-ой производной с произвольным шагом.

Для вывода формулы численного дифференцирования с равномерным шагом необходимо:

- выписать формулу (1) для k-ой производной с соответствующим числом членов;
- перейти от разделенных разностей к конечным разностям, используя формулы (5);
- выразить значения $\xi_i=x-x_i$ для $i=0,1,\dots n$ через величину шага дискретизации T, используя для x_i формулы (4), а значения x принимая равными $x=(m-n/2)T$ для точки повышенной точности и $x=mT$ для дифференцирования в реальном времени; в результате получают формулу, аналогичную (6);
- выразив конечные разности через значения функции в узлах интерполяции, получить формулу численного дифференцирования, аналогичную (7), представляющую собой линейную комбинацию $n+1$ значения функции, деленную на T^k.

Для получения оценки методической погрешности необходимо:

- в формуле численного дифференцирования (1) выделить первый отброшенный член для произвольной точки или второй отброшенный член для точки повышенной точности;
- в выделенном члене заменить разделенную разность на производную соответствующего порядка, используя простейшие формулы численного дифференцирования (2) или (7);
- в качестве оценки методической погрешности принять максимум модуля полученного выражения, заменив производную на максимум ее модуля на отрезке дифференцирования.

Для оценки максимума модуля производной некоторого порядка необходимо получить ее аналитическое выражение и затем исследовать модуль производной на максимум.

Формула для погрешности от неточности исходных данных получается заменой в расчетной формуле значений функции в узлах интерполяции на максимальное значение погрешности исходных данных Δ_{max} и суммированием этих величин без учета знака.

Оптимальный шаг получают из условия равенства нулю производной от суммы методической погрешности и погрешности от неточности исходных данных. Для определения оптимального шага максимум производной высшего порядка ищется на всем отрезке $[a,b]$; для определения оценки погрешности в точке - на интервале интерполяции, соответствующем этой точке.

В полученных формулах необходимо описать все входящие величины. Сами формулы рекомендуется представить в универсальном, удобном для написания программ виде. Например формулу разделеной разности k-го порядка рекомендуется представить в виде:

$$y(x_i,\ldots,x_{i+k})=\begin{cases} y(x_i) & \text{при } k=0; \\ (y(x_i,\ldots,x_{i+k-1})-y(x_{i+1},\ldots,x_{i+k}))/(x_i-x_{i+k}); & \end{cases}$$

а формулу обратных конечных разностей k-го порядка:

$$\nabla^k y[m]=\begin{cases} y[m] & \text{при } k=0; \\ \nabla^{k-1}y[m] - \nabla^{k-1}y[m-1] & \text{при } k>0. \end{cases}$$

Вычисление k-ых разделенной и конечных разностей рекомендуется оформить в виде соответствущих рекурсивных фун ций, имеющих в качестве аргументов номер шага, соответствующего x_o, и порядок разности k.

При программировании суммы произведений $\xi_i\xi_j\ldots\xi_l$ рекомендуется преобразовать ее к виду с вложенными суммами

$$\sum_{l>j>\ldots>i\geq 0}^{r_{max}} \xi_l\xi_j\ldots\xi_i = \sum_{i=0}^{r_{max}} \xi_i \ldots \sum_{j=q+1}^{r_{max}} \xi_j \sum_{l=j+1}^{r_{max}} \xi_l,$$

для которого удобно использовать рекурсивную функцию с параметрами: максимальная глубина вложения сумм p_{max}, номер уровня вложенности суммы p, нижний r_{min} и верхний r_{max} пределы суммирования. Рекурсия должна осуществляться с увеличением уровня вложенности суммы (индекс i соответствует внешней сумме, т.е. имеющей наименьшее значение уровня вложенности $p=1$, индекс l - самой внутренней сумме с уровнем вложенности $p=p_{max}$).

При выполнении п. 3.5 рекомендуется подготовить отдельные программы для равномерного и неравномерного шага дифференцирования. Для каждой программы необходимо сформулировать назначение и характеристику. Например, в варианте 20 для одной из разрабатываемых программ необходимо указать, что программа предназначена для численного дифференцирования в реальном времени по формуле третьей производной с неравномерным шагом и четырьмя учитываемыми членами.

Обе разрабатываемые программы могут иметь одинаковую часть для расчета функции в узлах, расчета погрешности и вывода результатов. Значения аргумента в узлах интерполяции при неравномерном шаге задаются равными значениям аргумента при равномерном шаге, что должно обеспечить возможность сравнения результатов расчетов по двум видам формул.

Точные или округленные численные значения исходных данных

рассчитываются в диапазоне изменения аргумента по заданным виду функции, шагу (или массиву значений аргумента в узлах интерполяции) и запоминаются до выполнения расчета производных.

Для получения округленного до q-го знака численного значения функции , необходимо умножить функцию на 10^q, прибавить 0.5, выделить целую часть и результат разделить на 10^q.

Вычислительную погрешность, которая принимает существенное значение при ограниченной разрядной сетке и большом числе операций, можно смоделировать с помощью функции, ограничивающей разрядность мантиссы числа, приведенной в Приложении.

Для сокращения времени на ввод текста можно воспользоваться заготовкой программы для формул численного дифференцирования с произвольным шагом, приведенной в Приложении, и загрузить ее с дискеты, полученной у преподавателя. Чтобы получить из заготовки готовую программу, необходимо дописать тела функций вычисления значений дифференцируемой функции, производной (по ее аналитическому выражению и по формуле численного дифференцирования) и оценки методической погрешности по остаточному члену.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е.А. Численные методы. -М.: Наука, 1982. -256 с.
2. Вычислительная математика / Данилина Н.И., Дубровская Н.С. Кваша О.П., Смирнов Г.В. - М.: Высш. шк., 1985. -472 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. -512 с.
4. Микропроцессорные системы автоматического управления / В.А. Бесекерский, Н.Б. Ефимов, С.И. Зиатдинов и др. Под общ. ред. В.А. Бесекерского. - Л.: Машиностроение, 1988. -365 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЗАГОТОВКА ПРОГРАММЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

```
PROGRAM Differ;   {Численное дифференцирование }
const
  K = 4;        {Порядок производной}
  Ns= 6;        {Число членов в формуле}
  N = Ns+K-1;{Номера узлов от 0 до N, N<20}
  ho= 0.2;      {Шаг дифференцирования}
  a = -1;       {Начало отрезка}
  b = 1;        {Конец отрезка}
  PowTochn=true{false};{Признак точки повышенной точности}
  q = 9;        {Порядок точности от 2 до 9 знаков после запятой}
  nBits= 15; {Число двоичных разрядов мантисы числа}
var
  X, Y : array [0..N+2] of real;{Значения аргумента и функции}
  i : integer;
  XO,MaxPr,dif,Ocen,Pogr:real;

{Округление числа Z до q разрядов после запятой}
function R(Z:real):real;
var i : integer;
    RZ: real;
begin
  RZ:=Z;
  for i:=1 to q do RZ:=10*RZ;
  RZ:=Round(RZ+0.5);
  for i:=1 to q do RZ:=RZ/10;
  R:=RZ;
end;

{Ограничение числа двоичных разрядов мантисы числа Z до nBits}
function RtRunc(Z:real;nBits:integer):real;       {nBits 1..37}
var Y : real;
    A : array[1..6] of byte absolute Y;
    i,j,k:integer;
const Mask:array[0..7] of byte=($80,$C0,$E0,$F0,$F8,$FC,$FE,$FF);
begin
  Y:=Z;
  i:=(nBits+1) div 8;
  j:=nBits+1-i*8;
  for k:=5-i downto 2 do A[k]:=0;
  A[6-i]:=A[6-i] and Mask[j];
  RtRunc:=Y;
end;

{Значение дифференцируемой Функции в точке X с q разрядами}
                                              {после запятой}
function F(X:real):real;
  begin
     F :=R({ν(X)});            { Вместо ν(X) вставить формулу }
  end;                          {  дифференцируемой Функции   }

{Производная r-го порядка в точке X}
function PrY(r:integer;X:real):real;
  begin
    PrY :={...};         {Вставить формулу производной r-го порядка}
  end;
```



```
{Таблица N+1 значений функции для расчета производной в точке XO}
procedure DataYX(XO:real;PowTochn:boolean);
  var j : integer;
  begin
    if PowTochn then X[0]:=XO+ho*n/2
    else X[0]:=XO;
    for j:=1 to N+2 do X[j]:=X[0]-j*h;
    for j:=0 to N+2 do Y[j]:=F(X[j]);
  end;

{Разделенная разность r-го порядка для узлов с i-го до i+r -го}
function dYdX(i,r:integer):real;
  begin
    if r=0 then dYdX:=Y[i]
    else dYdX:=(dYdX(i,r-1)-dYdX(i+1,r-1))/(x[i]-X[i+r]);
  end;

{Обратная конечная разность r-го порядка для узлов с i до i+r}
function dY(i,r:integer):real;
  begin
    if k=0 then dY:=Y[i] else dY:=dY(i,r-1)-dY(i+1,r-1)
  end;

{Нахождение MaxPr максимального значения модуля производной,
определяющей максимальную погрешность, и значения аргумента XO}
procedure FindMaxPr(var MaxPr,XO:real);
var M,X:real;
    r,i:integer;
  begin
    MaxPr:=0; if PowTochn then r:=N+2 elze r:=N+1;
    for i:=0 to 10 do
      begin
        X:=a+i*(b-a)/10; M:=abs(PrY(r,X));
        if M>MaxPr then begin MaxPr:=M; XO=X end
      end;
  end;

{Сумма произведений (XO-X[i].. Например для вычисления суммы
произведений с тремя уровнями вложенности для с i=0 до i=5 функция
S вызывается с параметрами 3,I,0,5}
function S(P,Pmax,Rmin,Rmax:integer):real;
var Sp : real;
    r  : integer;
  begin
    if P>Pmax then Sp:=1
      else
        begin
          Sp:=0;
          for r:=Rmin to Rmax do
              Sp:=Sp+(XO-X[r])*S(P+1,Pmax,r+1,Rmax);
        end;
    S:=Sp;
  end;

{Численное дифференцирование}
function DifY(X:real):real;
{var  ... ;}
  begin
    DifY:={...} {Вставить формулу численного дифференцирования}
  end;
```

```
{Оценка погрешности в точке X при MaxPr}
function Ocenka(X,MaxPr:real):real;
  begin
    Ocenka:={...}  {Вставить формулу для оценки погрешности}
  end;

begin                                         {Основная программа}
  writeln('Численное дифференцирование функции ...');
  writeln('k=',k,
          ', число членов в формуле-',Ns,
          ', h=',h0:7:5,
          ', точка повышенной точности-',PowTochn);
  FindMaxPr(X0,MaxPr);
  DataYX(X0,PowTochn); {Таблица значений функции}
  dif:=DifY(X0);     {Численное дифференцирование}
  Ocen:=Ocenka(X0,MaxPr);    {Оценка погрешности}
  Pogr:=dif-PrY(k,X0);          {Расчет погрешности}
  writeln('dYk/dX(',X0:4:3,')=',dif:10:8,
         ' Оценка=',Ocen:10:8,
         ' Погрешность=',Pogr:10:8)
end.
{Текст заготовки программы записан на дискете, которую можно
получить у преподавателя во время занятий}
```

СОДЕРЖАНИЕ