

ЗАДАНИЕ. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭДС. ПРИ НЕСКОЛЬКИХ КОММУТАЦИЯХ

1.1. Содержание задания.

Электродвижущая сила (э.д.с.) постоянного источника в момент времени $t=0$ включается в цепь при равных нулю токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Этот момент соответствует первой коммутации, что на схеме указано стрелкой номер «1» (рубильник1).

Вторая коммутация (включение или отключение рубильника2) происходит через интервал времени t_1 после первой коммутации. При этом значение t_1 определяется для схемы после первой коммутации и равно:

для схемы с одним накопителем после первой коммутации $t_1 = \frac{1}{|p|}$, где p - корень характеристического уравнения;

для схемы с двумя накопителями после первой коммутации:

а) при возникновении аperiodического процесса $t_1 = 1/|p_1|$, где

p_1 - меньший из двух корней характеристического уравнения;

б) при возникновении критического случая $t_1 = 1/|p|$, где

p - корни характеристического уравнения, причем $p = p_1 = p_2$;

в) при возникновении колебательного процесса $t_1 = T_{св}/4$, где

$T_{св}$ - период свободных колебаний.

Третья коммутация (включение или отключение рубильника 3) происходит через интервал времени t_2 после второй коммутации. Количественное значение t_2 определяется для схемы после второй коммутации на тех же условиях, что и значение t_1 после первой коммутации.

ЧАСТЬ 1. Рассчитать показанные на исходной схеме токи $i_1(t)$, $i_3(t)$ и напряжения на емкостях $u_c(t)$ классическим методом после каждой коммутации.

Построить в одних осях координат график $i_1(t)$ после каждой коммутации. Количественные расчеты для построения переходного тока $i_1(t)$ после каждой коммутации следует привести в виде таблицы. При вычислениях шаг расчета Δt принять равным $\Delta t = t_1/6$ в интервале времени после первой коммутации и $\Delta t = t_2/6$ в интервале времени после второй коммутации. После третьей коммутации значение Δt принять равным

$t = \frac{1}{3|p|}$ при аperiodическом процессе ($p = p_1$, $|p_1| < |p_2|$) и критическом случае, $\Delta t = T_{св}/24$ при колебательном процессе.

Расчеты и график $i_1(t)$ после третьей коммутации должны быть приведены до практического завершения переходного процесса и установления принужденного режима.

ЧАСТЬ 2. Рассчитать ток $i_3(t)$ операторным методом после третьей коммутации. Независимые начальные условия при этом принять из части 1, полученные классическим методом в момент третьей коммутации.

1.2. Исходные данные

Расчетные схемы приведены на рис.1 и выбираются в соответствии с номером n , под которым фамилия студента записана в списке учебной группы.

Числовые данные параметров схемы и источника эдс выбираются в соответствии с номерами n , учебного потока $N_{пот}$ и учебной группы $N_{гр}$ в потоке, которые задаются преподавателем, по следующим выражениям

$$E = 20 + 10 \cdot N_{пот} + 10 \cdot N_{гр} + 5 \cdot n, \text{ В};$$

$$R_1 = 10 + 2 \cdot n, \text{ Ом}; \quad R_2 = 20 + 2 \cdot n, \text{ Ом}; \quad R_3 = 30 + 2 \cdot n, \text{ Ом};$$

$$L_1 = 0,05 + 0,005 \cdot n, \text{ Гн}; \quad L_2 = L_3;$$

$$L_4 = 0,02 \cdot N_{гр} + 0,004 \cdot n, \text{ Гн}; \quad C_1 = C_3;$$

$$C_1 = 20 + 10 \cdot N_{пот} + 10 \cdot n, \text{ мкФ}; \quad C_2 = 20 + 5 \cdot N_{пот} + 10 \cdot N_{гр} + 10 \cdot n, \text{ мкФ}.$$

1.3. Рекомендации по выполнению задания и оформлению отчета

Номер учебного потока $N_{пот}$ и учебной группы $N_{гр}$ для выбора исходных данных и числовых значений параметров расчетной схемы указывает преподаватель.

Результаты самостоятельной работы по выполнению задания оформляются студентом в виде отчета, содержащего титульный лист, оглавление, основную часть расчетов и выводы, на листах форматом 210x297 мм или в ученической тетради.

При этом рекомендуется выполнение следующих условий:

на титульном листе указать университет (институт), кафедру, тему работы, номер студенческой группы, фамилию исполнителя и преподавателя, сроки выполненной работы;

в оглавлении привести заголовки разделов и пунктов отчета с указанием соответствующих страниц;

привести расчетную схему, исходные данные и условия задания;

в пояснительной записке привести все аналитические соотношения и расчеты с промежуточными вычислениями, необходимые для получения искомых уравнений, снабженные необходимыми текстовыми комментариями;

расчетные электрические схемы, временные диаграммы выполнить в масштабе с использованием чертежных инструментов и принадлежностей;

в выводах по работе отразить соответствие полученных результатов теоретическим положениям, а также совпадение результатов, полученных классическим и операторным методами.

$$P = 0,08(1 + \frac{42}{32}) + P(22 + \frac{22 \cdot 42}{32} + 42 + \frac{0,08}{32 \cdot 90 \cdot 10^{-6}}) + \frac{22}{32 \cdot 90 \cdot 10^{-6}}$$

$$= \frac{0,0774P + 20}{0,185P + 120,653P + 18780} =$$

$$= \frac{0,4184P + 378,38}{P + 652,18P + 101351,35}$$

$$P_{12} = -326,09 \pm \sqrt{106334,688 - 101351,35} =$$

$$= -326,09 \pm 20,59;$$

$$P_2 = -396,68;$$

$$P_1 = -255,5$$

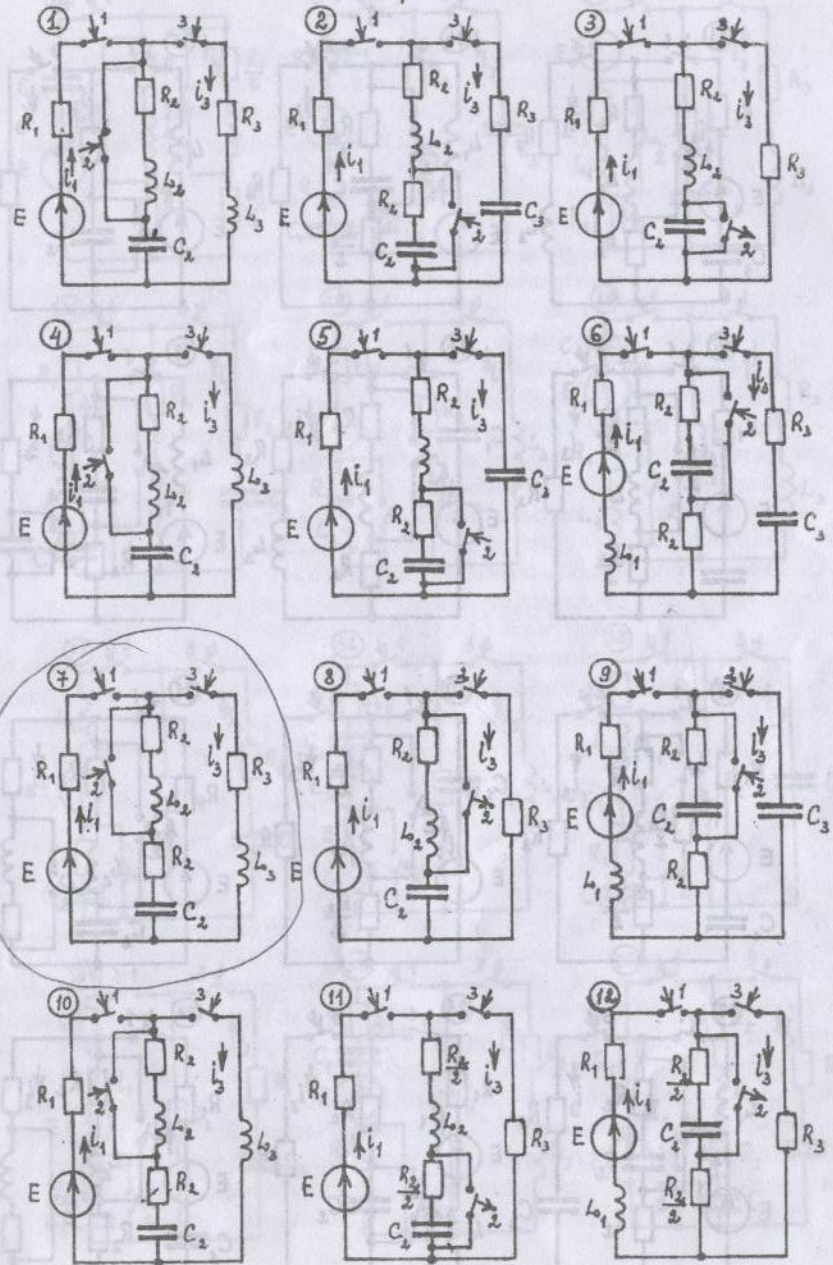


Рис. 1

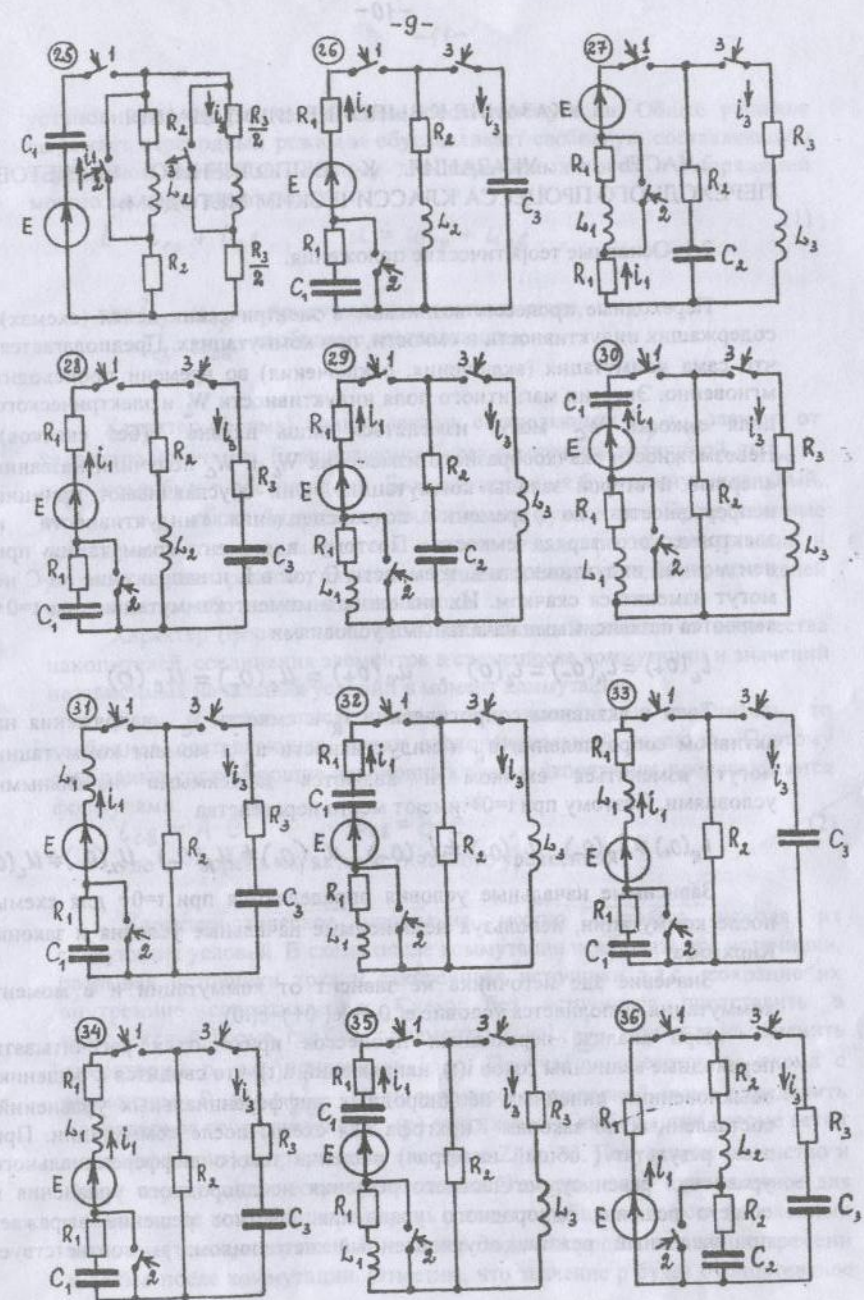
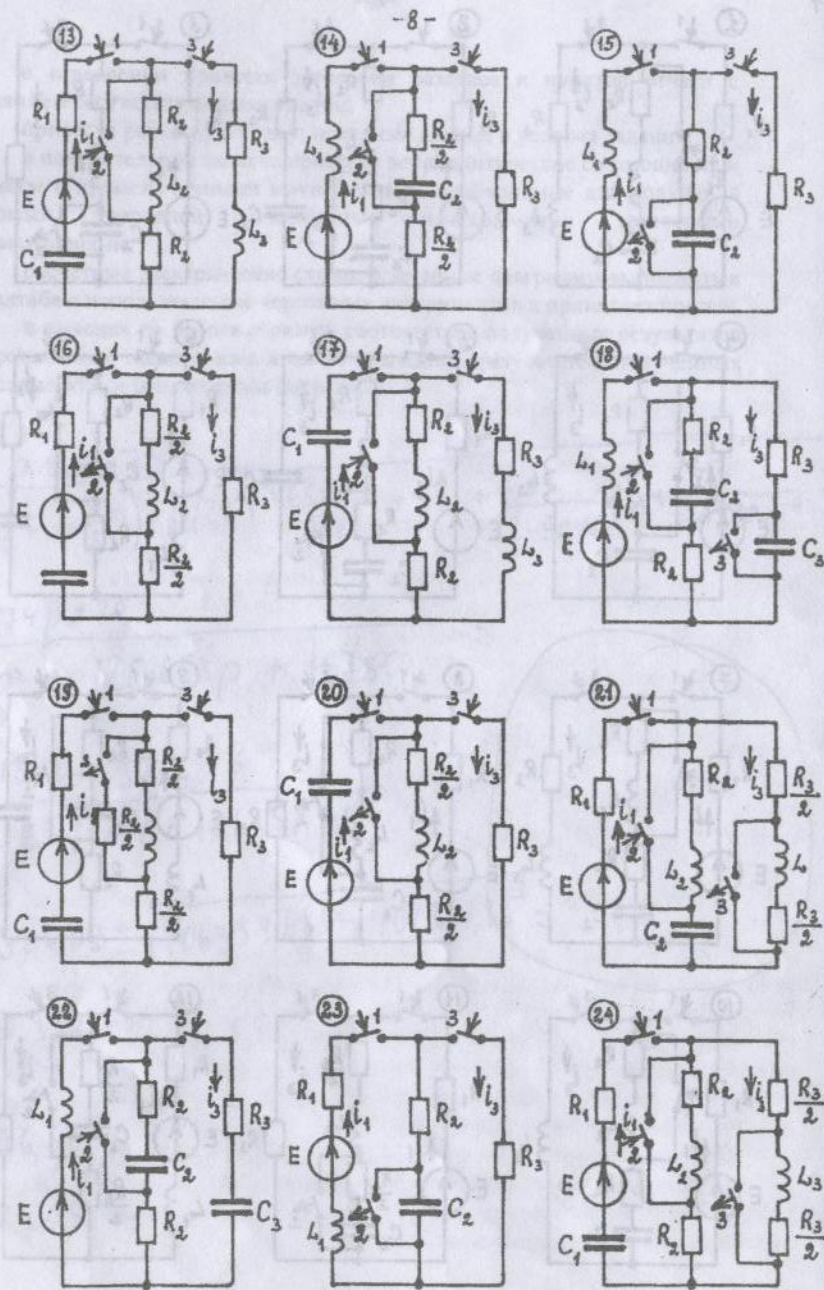


Рис. 1

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ

2. ЧАСТЬ I. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТОВ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ.

2.1. Основные теоретические положения.

Переходные процессы возникают в электрических цепях (схемах), содержащих индуктивности и емкости, при коммутациях. Предполагается, что сама коммутация (включения, отключения) во времени происходит мгновенно. Энергии магнитного поля индуктивности W_L и электрического поля емкости W_C могут изменяться лишь плавно (без скачков). Невозможности скачкообразного изменения W_L и W_C получили названия «первый и второй законы коммутации». Они обуславливают принцип непрерывности во времени потокоцепления индуктивности и электрического заряда емкости. Поэтому в момент коммутации при неизменной индуктивности L и емкости C ток в L и напряжение на C не могут измениться скачком. Их значения в момент коммутации при $t=0+$ являются независимыми начальными условиями

$$i_L(0+) = i_L(0-) = i_L(0), \quad u_C(0+) = u_C(0-) = u_C(0).$$

Токи в активном сопротивлении i_R и емкости i_C , напряжения на активном сопротивлении u_R и индуктивности u_L в момент коммутации могут измениться скачком и являются зависимыми начальными условиями. Поэтому при $t=0+$ имеют место неравенства

$$i_R(0+) \neq i_R(0-), \quad i_C(0+) \neq i_C(0-), \quad u_R(0+) \neq u_R(0-), \quad u_L(0+) \neq u_L(0-).$$

Зависимые начальные условия определяются при $t=0+$ для схемы после коммутации, используя независимые начальные условия и законы Кирхгофа.

Значение эдс источника не зависит от коммутации и в момент коммутации выполняется условие $e(0-) = e(0+) = e(0)$.

При анализе переходных процессов приходится рассчитывать переходные величины токов $i(t)$, напряжений $u(t)$, что сводится к решению обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа для схемы после коммутации. При этом результат (общий интеграл) решения такого дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Частное решение выражает принужденный режим, обусловленный источником, и соответствует

установившемуся режиму в схеме после коммутации. Общее решение выражает переходный режим и обуславливает свободную составляющую переходной величины. Поэтому для переходных токов и напряжений можно записать выражения

$$i = i_{np} + i_{св}, \quad u = u_{np} + u_{св}, \quad (1)$$

где i_{np}, u_{np} - принужденные составляющие,
 $i_{св}, u_{св}$ - свободные составляющие.

Характер (форма) принужденных составляющих i_{np}, u_{np} зависит от характера источника. Если источник будет постоянной величиной, то i_{np}, u_{np} тоже будут постоянными. Если же источник будет синусоидальный, то i_{np}, u_{np} также будут синусоидальными функциями. Принужденные составляющие определяются из расчета схемы после коммутации в установившемся режиме, применяя существующие методы расчета цепей постоянного либо синусоидального тока.

Характер (форма) свободной составляющей зависит от количества накопителей, соединения элементов в схеме после коммутации и значений независимых начальных условий в момент коммутации.

Если в схеме после коммутации всего один накопитель, то свободная составляющая имеет экспоненциальный характер. Поэтому свободные составляющие переходных тока и напряжения представляются формулами:

$$i_{св} = A \cdot e^{pt}, \quad u_{св} = B \cdot e^{pt}, \quad (2)$$

где p - корень характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение можно составить исходя из следующих условий. В схеме после коммутации исключить все источники, разрывая источники тока и закорачивая источники эдс., сохранив их внутренние сопротивления. Схему без источников представить в комплексной форме, где будут элементы $R, j\omega L, \frac{1}{j\omega C}$. При этом $j\omega$ заменить оператором p , т.е. приравнять $j\omega = p$. Получается операторная схема с элементами $R, pL, \frac{1}{pC}$. В полученной операторной схеме определить операторное сопротивление $Z(p)$ относительно любой ветви (кроме ветви источника тока) и приравнять его нулю $Z(p) = 0$. Полученное равенство и будет характеристическим уравнением. Это уравнение единственное для схемы после коммутации и корень p является общим для всех переходных величин (токов, напряжений), т.к. переходный процесс единый во времени в схеме после коммутации. Отметим, что значение p будет отрицательное

число ($p < 0$), что означает затухающий характер свободной составляющей, т.к. она не обусловлена источником.

A, B - постоянные интегрирования тока и напряжения, которые определяются из начальных условий, т.е. при $t=0+$.

Для определения одной неизвестной A либо B достаточно составить при $t=0+$ одно уравнение. Рассмотрим это на примере тока. Используя выражения (1) и (2) получим

$$i(0+) = i_{np}(0+) + i_{св}(0+) \quad \text{или} \quad i(0+) = i_{np}(0+) + A,$$

следовательно будет

$$A = i(0+) - i_{np}(0+), \quad (3)$$

где $i_{np}(0+)$ определяется по известной принужденной составляющей при $t=0+$. Отметим, что если принужденная составляющая постоянная величина, то она будет неизменной после коммутации.

Значение $i(0+)$ определяется для схемы после коммутации при $t=0+$, используя законы Кирхгофа и законы коммутации, как было отмечено выше.

Подобно определению A находится значение B для напряжения

$$B = u(0+) - u_{np}(0+). \quad (4)$$

Окончательно выражения тока и напряжения после коммутации будут

$$i = i_{np} + [i(0+) - i_{np}(0+)] \cdot e^{pt}, \quad u = u_{np} + [u(0+) - u_{np}(0+)] \cdot e^{pt}. \quad (5)$$

Если в схеме после коммутации будут два накопителя (пусть L и C), то дифференциальное уравнение будет второго порядка, а характеристическое уравнение будет второй степени, корни которого после вычислений могут быть представлены выражением

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (6)$$

где δ - величина, обратная постоянной времени схемы после коммутации, характеризует затухание свободной составляющей, с.

ω_0 - резонансная (собственная) частота схемы после коммутации, рад/с.

При этом в зависимости от подкоренного значения (от соотношения δ и ω_0) выражения (6) возможны три случая по характеру свободной составляющей, т.е. три случая переходного процесса.

Случай 1. При $\delta > \omega_0$ корни характеристического уравнения (6) действительные отрицательные числа $p_1 < 0$, $p_2 < 0$, причем $|p_1| < |p_2|$, будет аperiodический процесс.

Свободные составляющие тока и напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} i_{св} &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \\ u_{св} &= B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения постоянных интегрирования тока A_1, A_2 либо напряжения B_1, B_2 следует составить два уравнения при начальных условиях, т.е. при $t=0+$. При этом целесообразно использовать исходное уравнение (1) с учетом (7) и их производное. Так для тока будет

$$\left. \begin{aligned} i(0+) &= i_{np}(0+) + A_1 + A_2, \\ i'(0+) &= i'_{np}(0+) + p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Значения A_1, A_2 могут быть определены из системы двух уравнений (8) после нахождения начальных условий $i(0+)$ и $i'(0+)$ по законам Кирхгофа и законам коммутации для схемы после коммутации, а также расчета принужденной составляющей i_{np} и ее производной i'_{np} при $t=0+$. Условия определения принужденной составляющей для схемы после коммутации в установившемся режиме были рассмотрены выше.

Подобно определению A_1, A_2 находятся значения B_1, B_2 для напряжения из уравнений

$$\left. \begin{aligned} u(0+) &= u_{np}(0+) + B_1 + B_2, \\ u'(0+) &= u'_{np}(0+) + p_1 B_1 + p_2 B_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Случай 2. При $\delta = \omega_0$ корни характеристического уравнения (6) одинаковы и являются действительными отрицательными числами $p_1 = p_2 = p$, будет критический случай.

Свободные составляющие тока и напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} i_{св} &= (A_1 + A_2 t) \cdot e^{pt}, \\ u_{св} &= (B_1 + B_2 t) \cdot e^{pt}. \end{aligned} \quad (10)$$

Принцип определения постоянных интегрирования A_1, A_2 либо B_1, B_2 такой же, что и для случая 1 (aperiodического процесса). В итоге будут системы уравнений для схемы после коммутации при $t=0+$

$$\left. \begin{aligned} i(0+) &= i_{np}(0+) + A_1, \\ i'(0+) &= i'_{np}(0+) + p A_1 + A_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0+) &= u_{np}(0+) + B_1, \\ u'(0+) &= u'_{np}(0+) + p \cdot B_1 + B_2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Случай 3. При $\delta < \omega_0$ корни характеристического уравнения (6) комплексные и сопряженные числа $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{ce}$, будет колебательный процесс, где $\omega_{ce} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - угловая частота свободных колебаний, рад/с. Следовательно, период свободных колебаний будет $T_{ce} = 2\pi/\omega_{ce}$ с.

Свободные составляющие тока и напряжения имеют вид

$$i_{ce} = A_1 e^{-\delta t} \cos \omega_{ce} t + A_2 e^{-\delta t} \sin \omega_{ce} t \quad \text{или} \quad i_{ce} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{ce} t + \Psi_{ice}), \quad (13)$$

$$\text{где } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \Psi_{ice} = \arctg \frac{A_2}{A_1}$$

$$u_{ce} = B_1 e^{-\delta t} \cos \omega_{ce} t + B_2 e^{-\delta t} \sin \omega_{ce} t \quad \text{или} \quad u_{ce} = B e^{-\delta t} \sin(\omega_{ce} t + \Psi_{uce}), \quad (14)$$

$$\text{где } B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \quad \Psi_{uce} = \arctg \frac{B_2}{B_1}$$

Принцип определения постоянных интегрирования для тока A_1, A_2 или A, Ψ_{ice} для напряжения B_1, B_2 или B, Ψ_{uce} такой же, что и для случаев 1 и 2. В итоге будут системы уравнений для схемы после коммутации при $t=0+$

$$\left. \begin{aligned} i(0+) &= i_{np}(0+) + A_1, \\ i'(0+) &= i'_{np}(0+) - \delta A_1 + \omega_{ce} A_2, \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} i(0+) &= i_{np}(0+) + A \sin \Psi_{ice}, \\ i'(0+) &= i'_{np}(0+) - \delta A \sin \Psi_{ice} + \omega_{ce} A \cos \Psi_{ice} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0+) &= u_{np}(0+) + B_1, \\ u'(0+) &= u'_{np}(0+) - \delta B_1 + \omega_{ce} B_2, \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} u(0+) &= u_{np}(0+) + B \sin \Psi_{uce}, \\ u'(0+) &= u'_{np}(0+) - \delta B \sin \Psi_{uce} + \omega_{ce} B \cos \Psi_{uce} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для каждого из трех приведенных случаев после определения постоянных интегрирования получаем аналитические выражения составляющих тока i_{ce} и напряжения u_{ce} в соответствии с формулами (7), (10), (13), (14).

2.2. Рекомендуемая последовательность расчетов

С целью упорядочения расчетов переходных процессов и получения аналитического выражения искомой переходной величины можно принимать следующую последовательность.

1. В заданной расчетной схеме принять положительные направления токов и напряжений. Записать искомую переходную величину в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

2. Рассчитать схему до коммутации и определить при $t=0-$ значения тока в индуктивности $i_L(0-)$ и напряжения на емкости $u_C(0-)$.

3. На основе законов коммутации определить независимые начальные условия $i_L(0+) = i_L(0-) = i_L(0)$, $u_C(0+) = u_C(0-) = u_C(0)$.

для схемы после коммутации. Необходимые зависимые начальные условия определяются, используя независимые начальные условия и законы Кирхгофа.

4. Рассчитать принужденную составляющую искомой переходной величины для схемы после коммутации.

5. Для схемы после коммутации составить характеристическое уравнение и определить его корни.

6. Записать уравнение свободной составляющей искомой функции, вид которого определяется значениями корней характеристического уравнения. Определить постоянные интегрирования.

7. Записать выражение искомой переходной величины в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера рассмотрим расчет переходных процессов в схеме рис. 2 при многократных коммутациях. Заданы следующие параметры схемы: $E=100$ В, $L=0,125$ Гн, $R_1=40$ Ом, $R_2=20$ Ом, $C_1=3,125 \cdot 10^{-4}$ Ф, $C_2=2 \cdot 10^{-4}$ Ф.

Классическим методом определить после коммутаций токи $i_1(t), i_2(t)$ и напряжения $u_{C1}(t), u_{C2}(t)$ согласно требованиям содержания задания (см. п.1.1)

Отметим, что из-за ограниченности объема методических разработок в наших расчетах некоторые промежуточные вычисления, не имеющие принципиального значения, не будут приведены.

2.3. Определение переходных величин после первой коммутации

Расчетная схема после первой коммутации приведена на рис.3. Выполним расчеты $i(t)$ и $u(t)$ согласно рекомендуемой последовательности п.2.2 с учетом теоретических положений и формул п.2.1.

Вначале проведем расчеты тока $i_1(t)$. Пронумеруем последовательность расчетов (см.п.2.2.).

1) Направление расчетного тока задано в исходной схеме. Согласно формуле (1) будет $i_1 = i_{1np} + i_{1cb}$.

2) До коммутации цепь от источника отключена (рис.3). Поэтому будет $i_{1cb}(0_+) = i_1(0_+) = 0$, $u_{c1}(0_+) = u_1(0_+) = 0$.

3) Согласно законам коммутации независимые начальные условия будут $i_{1cb}(0_+) = i_{1cb}(0_+) = i_{1cb}(0_-) = 0$, $u_{c1}(0_+) = u_{c1}(0_+) = u_{c1}(0_-) = 0$. Определим одно зависимое начальное условие, которое потребуется при определении постоянных интегрирования.

$$u_{c1}(0_+) = i_1'(0_+) \cdot L = E - R_1 i_1(0_+) - u_{c1}(0_+) = E, \quad i_1'(0_+) = i_1'(0_+) = \frac{E}{L} = \frac{100}{0.125} = 800 \frac{B}{H}.$$

4) Принужденная составляющая искомого тока i_{1np} определяется по схеме рис.4. При постоянном источнике $E=100$ В в установившемся режиме емкость представляет собой разрыв. Поэтому значение $i_{1np}=0$. Также отметим, что $u_{c1np}=0$ и $u_{c1np} = u_{1np} = E = 100$ В.

5) Для составления характеристического уравнения рассмотрим операторную схему рис.5, где операторное входное сопротивление будет (см.п.1.1)

$$Z_{BX}(p) = R_1 + pL + \frac{1}{pC_1}, \text{ корнями которого будут}$$

$$p_{1,2} = -\frac{R_1}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC_1}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

После подстановки исходных данных получим $\delta = \frac{R_1}{2L} = 160 \text{ с}^{-1}$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} = 160 \text{ рад/с}.$$

Корни характеристического уравнения одинаковы $p_1 = p_2 = -160$.

Поэтому будет критический случай переходного процесса (см. случай 2).

6) Используя формулу (10), получим выражение свободной составляющей

$$i_{cb} = (A_1 + A_2 t) \cdot e^{-160t}.$$

Используя выражения (11), составим уравнения для определения постоянных интегрирования

$$\left. \begin{aligned} i_1(0_+) &= i_{1np}(0_+) + A_1, \\ i_1'(0_+) &= i_{1np}'(0_+) - 160 \cdot A_1 + A_2. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} 0 &= A_1, \\ 800 &= -160 A_1 + A_2 \end{aligned}$$

где из пунктов 3), 4) будет $i_1(0_+) = 0$, $i_{1np}(0_+) = 0$, $i_1'(0_+) = 800$.

Следовательно, получим $A_1 = 0$, $A_2 = 800$.

Выражение свободной составляющей будет $i_{cb} = 800 \cdot t \cdot e^{-160t}$.

7) Окончательно получим полное значение переходного тока

$$i_1(t) = i_{1np}(t) + i_{cb}(t) = 800 \cdot t \cdot e^{-160t}, \text{ А.} \quad (17)$$

Отметим, что для расчетов переходных процессов после второй коммутации должны быть известны ненулевые независимые начальные условия при $t_1 = \frac{1}{160}$, т.е. $i_1(t_1)$ и $u_{c1}(t_1)$. Поэтому эти переходные величины i_1 и u_{c1} должны быть обязательно рассчитаны после первой коммутации. Однако

$i_1 = i_1$ и, следовательно, ток i_1 уже получен. По условиям задания требуется расчет u_1 , что в свою очередь равно напряжению на емкости $u_1 = u_{c1}$.

Расчет напряжения u_{c1} после первой коммутации можно было бы провести по той же последовательности, что и ток i_1 . Однако u_{c1} можно определить по формулам

$$u_{c1} = u_1 = u_{c1np} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_{cb} dt \quad \text{или} \quad u_{c1} = u_1 = E - L i_1' - R_1 i_1.$$

Подставив в (18) результаты п. 3), 4), 7), получим

$$u_{c1} = u_1 = 100 - 100 e^{-160t} - 16000 \cdot t \cdot e^{-160t}. \quad (18)$$

Значения тока i_1 и напряжения u_1 после первой коммутации равны нулю ($i_1 = 0$, $u_1 = u_{c1} = 0$), т.к. вторая ветвь включается в схему лишь после третьей коммутации.

На этом заканчивается расчет переходного процесса и требуемых искомым величин после первой коммутации. Результатами являются выражения тока $i_1(17)$ и напряжения $u_1(18)$, которые справедливы в интервале времени $0_+ \leq t \leq t_1$.

II

2.4. Определение переходных величин после второй коммутации

Расчетная схема после второй коммутации приведена на рис.6. Как уже было отмечено и после второй коммутации ток i_2 и напряжение u_2 равны нулю. Поэтому искомыми будут ток i_1 и напряжение u_1 , что одновременно $i_1 = i_1$, $u_1 = u_{c1}$.

После второй коммутации, как и после первой, вначале проведем расчеты тока $i_1(t)$. Также пронумеруем последовательность расчетов (см. п.2.2)

1) Согласно формуле (1) будет $i_1 = i_{1np} + i_{1св}$.

2) До второй коммутации ток i_2 и напряжение u_{C_2} изменялись во времени в соответствии с выражениями (17) и (18). Поэтому согласно с содержанием задания (п.1.1) определим их значения в момент времени $t_1 = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{160}$ перед второй коммутацией

$$i_2(t_{1-}) = i_1(t_{1-}) = 800 \cdot t_1 \cdot e^{-160 \cdot t_1} = 800 \cdot \frac{1}{160} \cdot e^{-1} = 1,8394 \text{ A}$$

$$u_{C_2}(t_{1-}) = u_{C_1}(t_{1-}) = 100 - 100e^{-160 \cdot t_1} = 100 - 100e^{-1} = 100 - 100 \cdot \frac{1}{e} = 26,424 \text{ B}$$

3) Согласно законам коммутации независимые начальные условия будут в момент $t=t_{1+}$ после второй коммутации

$$i_2(t_{1+}) = i_1(t_{1+}) = 1,8394 \text{ A}, \quad u_{C_2}(t_{1+}) = u_{C_1}(t_{1+}) = 26,424 \text{ B}$$

Отметим, что после второй коммутации емкость C_2 шунтируется (см. рис.6), т.е. исключается из схемы, и в дальнейших расчетах не участвует. При этом процесс в этой емкости не рассматривается. Поэтому значение $u_{C_2}(t)$ в дальнейших расчетах не будет использовано.

4) Принужденная составляющая искомого тока i_{1np} определяется по схеме рис.7. При постоянном источнике $E=100 \text{ В}$ будет

$$i_{1np} = \frac{E}{R_1} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ A}$$

5) Для составления характеристического уравнения рассмотрим операторную схему рис.8, где операторное входное сопротивление будет (см. п.1.1)

$$Z_{вх}(p) = pL + R_1 = 0 \quad \text{где} \quad p = -\frac{R_1}{L} = -\frac{40}{0,125} = -320 \text{ с}^{-1}$$

6) Используя формулу (2), получим выражение свободной составляющей

$$i_{1св} = A_1 \cdot e^{p(t-t_1)} = A_1 \cdot e^{-320(t-t_1)}$$

Постоянную интегрирования A_1 определим в момент времени t_{1+} , используя выражение (5) и результаты пунктов 3), 4).

$$A_1 = i_1(t_{1+}) - i_{1np}(t_{1+}) = 1,8394 - 2,5 = -0,6606 \text{ A}$$

Окончательно выражение свободной составляющей будет

$$i_{1св} = -0,6606 \cdot e^{-320(t-t_1)} \text{ A}$$

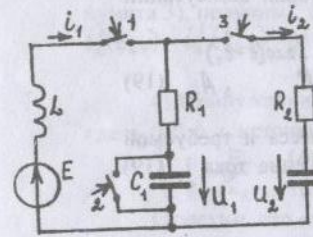


Рис. 2

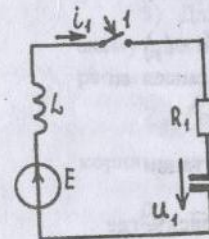


Рис. 3

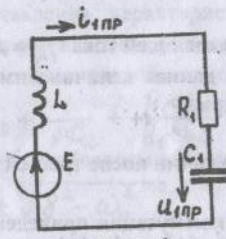


Рис. 4

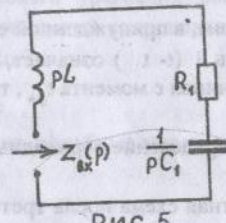


Рис. 5

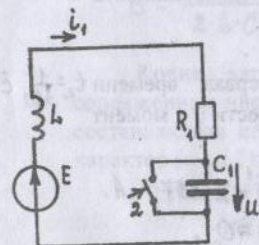


Рис. 6

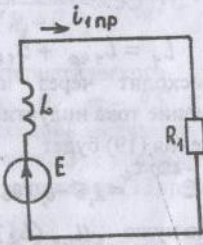


Рис. 7

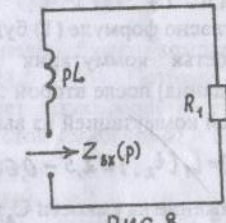


Рис. 8

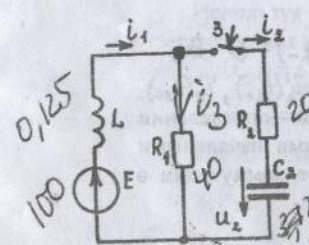


Рис. 9

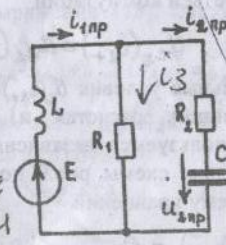


Рис. 10

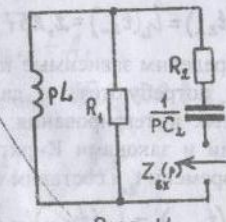


Рис. 11

7) Полное значение переходного тока i после второй коммутации будет

$$i_1(t-t_1) = i_{1np}(t-t_1) + i_{1cb}(t-t_1) = 2,5 \cdot 1(t-t_1) - 0,6606 \cdot e^{-320(t-t_1)}, A. \quad (19)$$

На этом заканчивается расчет переходного процесса и требуемой искомой величины i_1 после второй коммутации. Выражение тока i_1 (19) справедливо в интервале времени

$$t_{1+} \leq t \leq t_1 + t_{2-} \quad (\text{см. п.1.1. - содержание задания}).$$

Отметим, в принужденной составляющей тока $i_{1np} = 2,5 \cdot 1(t-t_1)$ сомножитель $1(t-t_1)$ означает, что данная величина имеет смысл во времени, начиная с момента t_{1+} , т.е. при $t > t_{1+}$.

2.5. Определение переходных величин после третьей коммутации

Расчетная схема после третьей коммутации приведена на рис. 9, где расчетными величинами являются $i_1(t)$, $i_2(t)$, $u_2(t) = u_{c2}(t)$.

Вначале определим ток $i_1(t)$, пронумеровав последовательность расчетов (см. п.2.2.)

1) Согласно формуле (1) будет $i_1 = i_{1np} + i_{1cb}$.

2) Третья коммутация происходит через интервал времени $t_{2-} = \frac{1}{320} c$ (см. п.1.1 задания) после второй. Значение тока индуктивности i_1 в момент перед третьей коммутацией из выражения (19) будет

$$i_1(t_{2-}) = i_1(t_{2-}) = 2,5 - 0,6606 \cdot e^{-320 \cdot t_{2-}} = 2,5 - 0,6606 \cdot e^{-1} = 2,257 A.$$

Напряжение на емкости C_2 равно нулю $u_{c2}(t_{2-}) = 0$.

3) Согласно законам коммутации независимые начальные условия будут в момент времени t_{2+} после третьей коммутации

$$i_1(t_{2+}) = i_1(t_{2-}) = 2,257 A, \quad u_{c2}(t_{2+}) = u_{c2}(t_{2-}) = 0 B.$$

Определим зависимые начальные условия $u_2(t_{2+}) = L_2 i_2'(t_{2+})$, $i_2(t_{2+})$, которые потребуются в дальнейших расчетах и при определении постоянных интегрирования. Воспользуемся независимыми начальными условиями и законами Кирхгофа для схемы рис.9 после коммутации в момент времени t_{2+} и составим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} i_1(t_{2+}) - i_2(t_{2+}) - i_3(t_{2+}) &= 0, \\ L_2 i_2'(t_{2+}) + R_2 i_2(t_{2+}) + u_{c2}(t_{2+}) &= E, \\ R_2 i_2(t_{2+}) + u_{c2}(t_{2+}) - R_1 i_3(t_{2+}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Подставив исходные данные и независимые начальные условия пункта 3), получим $i_2(t_{2+}) = 1,505 A$, $u_2(t_{2+}) = 69,9 B$, $i_2'(t_{2+}) = i_3'(t_{2+}) = 559,2 B/Гн$.

4) Принужденная составляющая тока i определяем по схеме рис.10, где $i_{2np} = 0$, т.к. источник э.д.с. постоянной величины,

$$i_{1np} = \frac{E}{R_1} = \frac{400}{40} = 10 A, \quad i_{3np} = i_{1np}$$

Отметим, что из уравнения $R_1 i_{3np} - R_2 i_{2np} - u_{c2np} = 0$ будет

$$u_{c2np} = R_1 i_{3np} = 40 \cdot 10 = 400 B.$$

5) Для составления характеристического уравнения рассмотрим схему рис. 11. Для уменьшения объема вычислений сопротивление $Z_{\delta}(p)$ рассмотрим относительно второй ветви (см. п.2.1.).

$$Z_{\delta x}(p) = R_2 + \frac{1}{p \cdot C_2} + \frac{R_1 p L_2}{R_1 + p L_2} = 0,$$

корнями которого будут (введем обозначения, подобные выражению (6))

$$P_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

$$\text{где } \delta = \frac{L_2 + C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{2 \cdot L_2 \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2)} = 95 \cdot c^{-1}, \quad \omega_0^2 = \frac{R_1}{L_2 \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2)} = 25666,6 \frac{paq}{c}$$

Корни характеристического уравнения будут комплексные и сопряженные числа $P_{1,2} = -95 \pm j 132,8$. Поэтому свободная составляющая переходной величины имеет затухающий колебательный характер (см. п.2.1, случай 3) с угловой частотой колебаний $\omega_{\delta} = 132,8 \text{ рад/с}$.

6) Используя выражение (13) получим

$$i_{1cb} = A_1 e^{-95(t-t_1-t_{2+})} \cdot \cos[132,8(t-t_1-t_{2+})] + A_2 e^{-95(t-t_1-t_{2+})} \cdot \sin[132,8(t-t_1-t_{2+})], A.$$

Используя выражения (15), составим уравнения для определения интегрирования A_1, A_2 :

$$\left. \begin{aligned} i_1(t_{2+}) &= i_{1np}(t_{2+}) + i_{1cb}(t_{2+}) = i_{1np}(t_{2+}) + A_1, \\ i_1'(t_{2+}) &= i_{1np}'(t_{2+}) + i_{1cb}'(t_{2+}) = i_{1np}'(t_{2+}) - 95 \cdot A_1 + 132,8 \cdot A_2, \end{aligned} \right\}$$

где из пунктов 3), 4) будет

$$i_1(t_{2+}) = i_2(t_{2+}) = 2,257 A, \quad i_{1np}(t_{2+}) = 10 A,$$

$$i_1'(t_{2+}) = 559,2 \frac{B}{Гн}, \quad i_{1np}'(t_{2+}) = 0.$$

Тогда будет

$$\left. \begin{aligned} 2,257 &= 2,5 + A_1 \\ 559,2 &= -95A_1 + 132,8A_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{Откуда } A_1 = -0,243, \quad A_2 = 4,037.$$

Выражение свободной составляющей будет

$$i_{icb} = -0,243 e^{-95(t-t_1-t_2)} \cos[132,8(t-t_1-t_2)] + 4,037 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2)], A.$$

или с учетом (13) будет

$$i_{icb} = 4,04 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2) - 3,44^\circ] A.$$

7) Полное значение переходного тока i будет

$$i(t-t_1-t_2) = i_{np} + i_{icb} = 2,5 \cdot 1(t-t_1-t_2) + 4,04 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2) - 3,44^\circ], A, (20)$$

где начальная фаза свободной составляющей тока $\psi_{icb} = -3,44^\circ$

приведена для наглядности в электрических градусах. При построении графика $i(t)$ во времени t целесообразно ψ_{icb} привести в радианах $\psi_{icb} = -0,06004$ рад, т.к. $\omega_{ce} t = 132,8(t-t_1-t_2)$ при подстановке значения времени t тоже будет в радианах.

Теперь выполним расчеты $u_2(t)$. На расчетной схеме рис.9 $u_2(t) = u_c(t)$. При этом будем пользоваться уже известными результатами, полученными выше при определении тока $i_1(t)$ [см. п.2),3),4),5)].

При нумерации последовательности расчетов (см.п.2.2) будет:

$$1) u_2 = u_{2np} + u_{2cb},$$

$$2) u_2(t_2-) = 0,$$

$$3) u_2(t_2+) = u_2(t_2-) = 0,$$

$$4) u_{2np} = 100 B,$$

$$5) P_{1,2} = -95 \pm j 132,8$$

6) Согласно выражению (14) будет

$$u_{2cb} = B_1 e^{-95(t-t_1-t_2)} \cos[132,8(t-t_1-t_2)] + B_2 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2)] B.$$

С помощью выражений (16) составим уравнения для определения постоянных интегрирования B_1, B_2

$$u_2(t_2+) = u_{2np}(t_2+) + u_{2cb}(t_2+) = u_{2np}(t_2+) + B_1,$$

$$u_2'(t_2+) = u_{2np}'(t_2+) + u_{2cb}'(t_2+) = u_{2np}'(t_2+) - 95B_1 + 132,8B_2,$$

где известны значения

$$u_2(t_2+) = u_{2c}(t_2+) = 0, \quad u_{2np}(t_2+) = 100, \quad u_{2np}'(t_2+) = 0.$$

Значение $u_2'(t_2+)$ определим из равенства $i_2 = C_2 u_2'$ или $u_2' = \frac{i_2}{C_2}$ при t_2+

$$u_2'(t_2+) = i_2(t_2+)/C_2 = \frac{1,505}{2 \cdot 10^{-4}} = 7525, \frac{A}{Ф}.$$

Получим

$$0 = 100 + B_1,$$

$$7525 = -95B_1 + 132,8B_2$$

Тогда свободная составляющая напряжения будет

$$u_{2cb} = -100 e^{-95(t-t_1-t_2)} \cos[132,8(t-t_1-t_2)] - 14,87 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2)] B,$$

или с учетом (14) будет

$$u_{2cb} = 101,1 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2) - 98,5^\circ] B.$$

где начальная фаза $\psi_{u_{2cb}} = -98,5^\circ$ приведена для наглядности в электрических градусах. В радианах она будет равна $\psi_{u_{2cb}} = -1,71915$ рад.

7) Полное значение переходного напряжения u_2 будет

$$u_2(t-t_1-t_2) = u_{2np} + u_{2cb} = 100 \cdot 1(t-t_1-t_2) + 101,1 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2) - 98,5^\circ] B, (21)$$

Отметим в принужденных составляющих тока $i_{np} = 2,5 \cdot 1(t-t_1-t_2)$ и напряжения $u_{2np} = 100 \cdot 1(t-t_1-t_2)$ сомножитель $1(t-t_1-t_2)$ означает, что данные величины имеют смысл во времени, начиная с момента t_2+ , т.е. при $t_1 + t_2+ \leq t$.

Расчеты тока $i_2(t)$ можно было бы выполнить в той же последовательности, что ток $i_1(t)$ и напряжение $u_2(t)$. Однако для уменьшения объема вычислений воспользуемся зависимостью

$$i_2 = i_{c2} = C_2 \frac{du_{2c}}{dt} = C_2 u_2'$$

Принужденная составляющая тока i_2 будет равна нулю [см. расчет i_1 , пункт 4)]. Полное его значение равно свободной составляющей

$$i_2(t-t_1-t_2) = C_2 u_2' = -1,9209 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2) - 98,5^\circ] + 2,6852 e^{-95(t-t_1-t_2)} \cos[132,8(t-t_1-t_2) - 98,5^\circ]$$

или

$$i_2(t-t_1-t_2) = 3,302 e^{-95(t-t_1-t_2)} \sin[132,8(t-t_1-t_2) + 27,08^\circ] A, (22)$$

где начальная фаза тока в электрических градусах $\psi_{i_2} = 27,08^\circ$ будет в радианах $\psi_{i_2} = 0,4726$ рад.

На этом заканчивается расчет переходных величин после третьей коммутации. Результатами являются выражения тока $i_1(t)$ -(20), напряжения $u_2(t)$ -(21) и тока $i_2(t)$ -(22), которые справедливы в интервале времени $t_1 + t_{\text{з}} \leq t < \infty$

Известно, что переходный процесс теоретически продолжается бесконечно долго, а практически заканчивается по времени через $(4 \div 5) \cdot T_4$, где T_4 - постоянная времени цепи. В нашей задаче после третьей коммутации она является величиной обратной коэффициенту затухания $T_4 = 1/\delta = 1/95 = 0,010526$ с. Через $(4 \div 5) \cdot T_4$ свободная составляющая по величине не более 2-3% принужденной составляющей. Поэтому наступает установившийся режим.

На этом заканчивается расчет переходных процессов в заданной схеме классическим методом при многократных коммутациях.

2.6. Построение графика переходного тока после коммутаций

Согласно условиям задания (см. п.1.1, часть 1) для построения графика $i_1(t)$ выполненные расчеты для дискретных значений времени t с шагом Δt приведем в таблицах. При этом после каждой коммутации будет свой закон изменения тока $i_1(t)$ во времени [см. выражения (17), (19), (20)]. В расчетах будет соответствующий шаг Δt . Поэтому для каждого интервала времени выполним отдельные расчеты и приведем отдельные таблицы.

2.6.1. Расчеты переходного тока после первой коммутации

Расчетная формула (17) $i_1(t) = 800 \cdot t \cdot e^{-160t}$, А в интервале времени $0 \leq t \leq t_1$. Расчетный интервал времени $t_1 = 1/160 = 6,25 \cdot 10^{-3}$ с. Шаг расчета согласно условиям задания (см. п.1.1) принимаем равным $\Delta t = t_1/6 = 1,0416 \cdot 10^{-3}$ с.

Расчеты приведены в таблице 1.

Таблица 1

№ п.п	$t \cdot 10^{-3}$, с	$-160 \cdot t$	e^{-160t}	i_1 , А
0	0	0	1	0
1	1,0416(6)	-0,166(6)	0,84648	0,7054
2	2,0833(3)	-0,333(3)	0,71653	1,1942
3	3,125	-0,5	0,60653	1,5163
4	4,166(2)	-0,66(6)	0,51342	1,7114
5	5,2083(3)	-0,833(3)	0,4346	1,8108
6	6,25	-1,0	0,36788	1,8394

2.6.2. Расчеты переходного тока после второй коммутации

Расчетная формула (19) $i_1(t-t_1) = 2,5 \cdot 1(t-t_1) - 0,6606 \cdot e^{-320(t-t_1)}$, А в интервале времени $t_1 + t_{\text{з}} \leq t \leq t_1 + t_{\text{з}}$. Расчетный интервал времени будет $t_{\text{з}} = 1/320 = 3,125 \cdot 10^{-3}$ с. Шаг расчета (см. п.1.1) принимаем равным $\Delta t = t_{\text{з}}/6 = 0,52083(3) \cdot 10^{-3}$ с. Расчеты приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ п.п	$(t-t_1) \cdot 10^{-3}$, с	$-320(t-t_1)$	$e^{-320(t-t_1)}$	$i_{\text{св}}$, А	i_1 , А
0	0	0	1	-0,6606	1,8394
1	0,52083(3)	0,166(6)	0,84648	-0,5592	1,9408
2	1,04166(6)	0,333(3)	0,71653	-0,47314	2,02666
3	1,5625	0,5	0,60653	-0,40067	2,0991
4	2,0833(3)	0,666(6)	0,51342	-0,339916	2,1608
5	2,60416(6)	0,833(3)	0,4346	-0,28709	2,213
6	3,125	1,00	0,36788	-0,24302	2,25698

2.6.3. Расчеты переходного тока после третьей коммутации

Расчетная формула (20) $i_1(t-t_1-t_{\text{з}}) = 2,5 \cdot 1(t-t_1-t_{\text{з}}) + 4,044 \cdot e^{-160(t-t_1-t_{\text{з}})} \sin[0,288(t-t_1-t_{\text{з}}) - 0,06004]$, А в интервале времени $t_1 + t_{\text{з}} \leq t \leq \infty$. Расчетный интервал времени для построения графика до установления принужденного режима (см. п.1.1) будет примерно $4T_4 = 4/\delta = 4/95 = 0,0421053$ с. Сравним его с периодом свободной составляющей $T_{\text{св}} = 2\pi/\omega_{\text{св}}$, чтобы оценить количество периодов либо части лишь одного периода колебаний свободной составляющей $i_{\text{св}}(t)$ в расчетном интервале $T_{\text{св}} = 2\pi/132,8 = 0,0473131$ с. Получим, что $4T_4 < T_{\text{св}}$. Следовательно, до затухания $i_{\text{св}}$ успеет совершить не более одного периода.

Шаг расчета (см. п.1.1) принимаем равным $\Delta t = T_{\text{св}}/24 = 1,97138 \cdot 10^{-3}$ с. Расчеты приведены в таблице 3, где из-за ограниченности объема методических разработок расчеты на четный шаг Δt не приведены.

$$\Delta t = 0,054 \cdot 10^{-3}$$

Таблица 3

N° п.п.	$(t-t_1-t_2) \cdot 10^{-3} \text{ с}$	$e^{-\frac{t-t_1-t_2}{\tau}}$	$\ln[1348(t-t_1-t_2) - 0,0444]$	$i_{1\text{ср}}, \text{ А}$	$i_1, \text{ А}$
0	0	1	-0,060004	-0,2426	2,2574
1	1,97138	0,82921	0,2004	0,672	3,172
3	5,91414	0,57015	0,6634	1,53	4,03
5	9,857	0,3920	0,9486	1,504	4,004
7	13,799	0,2695	0,9797	1,068	3,568
9	17,742	0,1853	0,7482	0,561	3,061
11	21,685	0,1274	0,3163	0,163	2,663
13	25,628	0,08763	-0,2004	-0,071	2,429
15	29,57	0,06025	-0,6634	-0,162	2,338
17	33,513	0,04143	-0,9486	-0,159	2,341
19	37,456	0,02848	-0,9797	-0,113	2,387
21	41,399	0,01958	-0,7482	-0,0593	2,4407
23	45,34	0,01347	-0,3163	-0,0172	2,4828
25	49,28	0,00926	0,2004	0,0075	2,5075

Для построения графика $i_1(t)$ после всех трех коммутаций в одних осях координат выберем масштабы тока и времени. Отметим, что интервал времени после третьей коммутации больше чем в 4 раза суммарного интервала после первой и второй коммутаций (t_1+t_2). Поэтому для более компактного расположения графика примем два масштаба для времени t . От 0 до t_1+t_2 будет $10 \text{ мм} \cdot 10^{-3} \text{ с}$; а начиная от t_1+t_2 масштаб увеличим в 4 раза и будет $10 \text{ мм} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. График $i_1(t)$ приведен на рис. 12.

$$i_1 = 2,555(t-t_1-t_2) \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t-t_1-t_2}{\tau}}$$

$$i_1 = 3,9668(t-t_1-t_2) \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t-t_1-t_2}{\tau}}$$

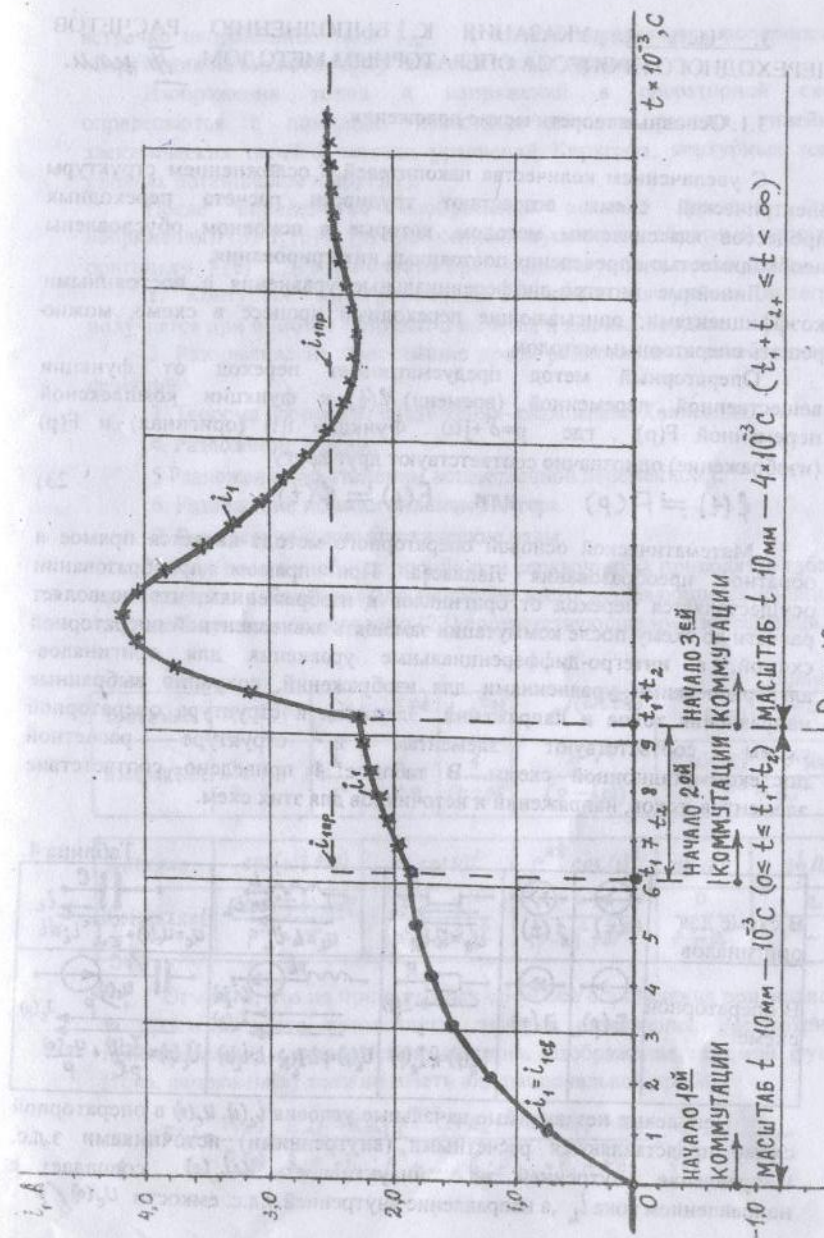


Рис. 12.

3. Часть 2. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТОВ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ. III том.

3.1. Основные теоретические положения.

С увеличением количества накопителей и осложнением структуры электрической схемы возрастают трудности расчета переходных процессов классическим методом, которые в основном обусловлены необходимостью определения постоянных интегрирования.

Линейные интегро-дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, описывающие переходный процесс в схеме, можно решать операторным методом.

Операторный метод предусматривает переход от функции вещественной переменной (времени) $\varphi(t)$ к функции комплексной переменной $F(p)$, где $p = \delta + j\omega$. Функции $f(t)$ (оригинал) и $F(p)$ (изображение) однозначно соответствуют друг другу

$$\varphi(t) \rightleftharpoons F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \rightleftharpoons \varphi(t) \quad (23)$$

Математической основой операторного метода является прямое и обратное преобразования Лапласа. При прямом преобразовании осуществляется переход от оригиналов к изображениям, что позволяет расчетную схему после коммутации замещать эквивалентной операторной схемой, а интегро-дифференциальные уравнения для оригиналов алгебраическими уравнениями для изображений, сохранив выбранные направления токов и напряжений. Элементы и структура расчетной схемы соответствуют элементам и структуре послекоммутационной схемы. В таблице 4 приведено соответствие элементов, токов, напряжений и источников для этих схем.

Таблица 4.

В схеме для оригиналов					
	$e(t)$	$j(t)$	$U_R = R \cdot I_R$	$U_L = L \cdot I_L$	$U_C = U_C(0) + \int_0^t I_C dt$
В операторной схеме					
	$E(p)$	$J(p)$	$U_R(p) = R \cdot I_R(p)$	$U_L(p) = pL \cdot I_L(p) - L \cdot I_L(0)$	$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{U_C(0)}{p}$

Ненулевые независимые начальные условия $I_L(0)$, $U_C(0)$ в операторной схеме представляются расчетными (внутренними) источниками э.д.с. Направление внутренней э.д.с. индуктивности $L \cdot I_L(0)$ совпадает с направлением тока I_L , а направление внутренней э.д.с. емкости $U_C(0)/p$

встречно направлению тока I_C и ее знак определяется полярностью напряжения на емкости $U_C(0)$ в момент коммутации.

Изображения токов и напряжений в операторной схеме определяются с помощью известных методов расчета линейных электрических цепей (метода уравнений Кирхгофа, контурных токов, узловых потенциалов и других).

После определения изображения искомой функции (тока, напряжения) $F(p) = F_1(p)/F_2(p)$ необходимо осуществить обратный переход к оригиналу $f(t)$. Для отыскания оригинала могут быть применены:

1. Контурное интегрирование. Значение контурного интеграла получается при помощи теоремы о вычетах и леммы Жордана.
2. Разложение на простейшие дроби рациональных алгебраических функций.
3. Теорема (формула) разложения - разложение Хевисайда.
4. Разложение в ряды.
5. Разложение по степеням вещественной переменной t .
6. Разложение по многочленам Лаггера.
7. Разложение в асимптотические ряды.

Кроме того в учебных пособиях и справочниках приводятся таблицы преобразования Лапласа. Для наиболее часто встречающихся функций в таблице 5 приведены согласно (23) соответствующие им изображения.

Таблица 5.

Оригинал	$f(t)$	$\delta(t)$	t	e^{at}	$t \cdot e^{at}$	$e^{j(\omega t \pm \varphi)}$	$\sin(\omega t \pm \varphi)$
Изображение	$\frac{1}{p}$	1	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$\frac{e^{j\varphi}}{(p-j\omega)}$	$\frac{\omega \cos \varphi \pm p \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$

Оригинал	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$t \cdot \cos \omega t$	$e^{at} \cdot \cos \omega t$	$\operatorname{ch} at$	$\operatorname{sh} at$
Изображение	$\frac{p \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$

Отметим, что из приведенных способов определения оригиналов из-за простоты часто применяется теорема разложения. Рассмотрим ее применительно к выполнению задания. Изображение искомой функции (тока, напряжения) должно иметь вид рациональной дроби.

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} \quad (24)$$

где коэффициент $A_k = F_1(p_k)/F_2'(p_k)$,

a_k, b_k - вещественные числа,

степень числителя $F_1(p)$ ниже степени знаменателя $F_2(p)$, т.е. $m < n$,

p_k - корни многочлена знаменателя, определяемые при $F_2(p)=0$,

$F_1(p_k)$ - значение числителя при $p=p_k$,

$F_2'(p) = \frac{dF_2(p)}{dp}$ - производная знаменателя по независимой переменной,

т.е. по оператору «р»,

$F_2'(p_k)$ - значение $F_2'(p) = F_2'(p_k)$ при $p=p_k$.

В зависимости от корней $F_2(p)=0$ возможны две формулы для определения оригинала, которому соответствует изображение (24).

Если все корни простые, т.е. $F_2(p)$ не содержит кратные корни, то оригинал определяется по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \quad (25)$$

Отметим, что в заданных вариантах схем рис.1 случаи простых корней будут, если после коммутации цепь содержит лишь один накопитель (L или C) или два накопителя (L, C) при апериодическом и колебательном характере переходного процесса (см. п.2.1, случаи 1,3).

В заданных схемах рис.1 кратные корни будут, если после коммутации при двух накопителях (L, C) в цепи возникает апериодический процесс (см. п.2.1, случай 2).

При наличии кратных корней оригинал можно определить по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n-x} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} + e^{p_j t} \left\{ \sum_{j=1}^x \frac{t^{x-j}}{(x-j)! (j-1)!} \cdot \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left[\frac{F_1(p_j)}{F_2(p_j)} \cdot (p-p_j)^x \right] \right\} \quad (26)$$

где первая слагаемая $\sum_{k=1}^{n-x} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = \sum_{k=1}^{n-x} A_k e^{p_k t}$ соответствует

выражению (25) и, следовательно, простым корням, число которых $n-x$,

x - число (порядок) кратных корней,

второе слагаемое $e^{p_j t} \left\{ \sum_{j=1}^x \frac{t^{x-j}}{(x-j)! (j-1)!} \cdot \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left[\frac{F_1(p_j)}{F_2(p_j)} \cdot (p-p_j)^x \right] \right\}$

соответствует кратным корням, повторяющимся x раз с значением p_j , где можно выразить через коэффициент $A_j = \frac{F_1(p_j)}{F_2(p_j)} \cdot (p-p_j)^x$

При определении оригинала по формулам (25) и (26) вначале следует рассчитать корни $F_2(p)$. Затем при $p=p_k$ вычислить значения $F_1(p_k)$, $F_2'(p_k)$ и при $p=p_j$ - значения производной коэффициента $A_j(p_j)$ с последующим суммированием результатов.

3.2. Рекомендуемая последовательность расчетов

Для упорядочения расчетов переходных процессов операторным (символическим) методом можно принимать следующую последовательность.

1. В заданной докоммутационной расчетной схеме выбирать положительные направления токов и напряжений, рассчитать ток в ветви индуктивности $i_L(t)$ и напряжение на емкости $u_C(t)$ и определить при $t=0$ независимые начальные условия $i_L(0)$, $u_C(0)$.

2. Начертить эквивалентную операторную схему после коммутации с указанием положительных направлений операторных источников, токов, напряжений и внутренних э.д.с. $L \frac{di_L(0)}{dt}$, $\frac{u_C(0)}{p}$, учитывающих независимые начальные условия.

3. Определить изображение заданного источника для схемы после коммутации.

4. Определить изображения искомых переходных функций (токов, напряжений) по операторной схеме, применив известные методы расчета электрических цепей (методы уравнений Кирхгофа, контурных токов, узловых потенциалов). Отметим, что при нахождении лишь одного изображения может быть целесообразным метод эквивалентного генератора.

5. Определить оригинал искомой функции по изображению используя существующие методы обратного преобразования.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера рассмотрим расчет переходного тока $i_L(t)$ операторным методом в схеме рис.9 с учетом заданных условий в расчетах классическим методом (см. п.2.5), что соответствует условиям задания (см. п.1.1, часть 2). Используем рекомендованную последовательность расчета в пункте 3.2.

1) Используем результаты классического метода расчета переходных процессов в пунктах 2.4, 2.5. Поэтому положительные направления токов и напряжений принимаем заданными. В момент коммутации, который примем при $t=0$, известны независимые начальные условия $i_L(0) = 2,257$ А и $u_C(0) = 0$ В.

2) Расчетная операторная схема после коммутации приведена на рис. 13, где $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $L = 0,125$ Гн, $C_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Ф, $E = 100$ В. Значения внутренних источников э.д.с. равны

$$L i_L(0) = 0,125 \cdot 2,257 = 0,282125 \text{ Гн} \cdot \text{А}, \quad u_C(0)/p = 0/p = 0.$$

3) Изображение постоянного источника э.д.с. будет (см. табл. 5)

$$E/p = 100/p.$$

4) Для определения изображения искомого тока $I_2(p)$ по схеме рис. 13 воспользуемся методом эквивалентного генератора в операторной форме.

Расчеты можно разделить на три этапа. На первом этапе определим операторное напряжение холостого хода $U_{12}(p)$ активного двухполюсника после разрыва ветви с током $I_2(p)$. Вспомогательная операторная схема приведена на рис. 14. Используя законы Кирхгофа и Ома получим

$$U_{12}(p) = \frac{\frac{E}{p} + L \cdot i_L(0)}{R_1 + p \cdot L} \cdot R_1 \quad (27)$$

На втором этапе определим входное операторное сопротивление $Z_{12}(p)$ активного двухполюсника со стороны зажимов разорванной ветви с током $I_2(p)$. Из вспомогательного операторной схемы рис. 15 следует

$$Z_{12}(p) = \frac{pL \cdot R_1}{pL + R_1} \quad (28)$$

На третьем этапе находим искомым операторный ток $I_2(p)$ по вспомогательной схеме рис. 16, где операторная э.д.с. эквивалентного генератора $E_3(p)$ равно напряжению холостого хода $U_{12}(p)$ (27), т.е. $E_3(p) = U_{12}(p)$, и операторное эквивалентное сопротивление $Z_3(p)$ равно входному сопротивлению $Z_{12}(p)$ (28), т.е. $Z_3(p) = Z_{12}(p)$.

Используя второй закон Кирхгофа в операторной форме для схемы рис. 16, получим значение $I_2(p)$.

$$I_2(p) = \frac{E_3(p) - \frac{U_{C_2}(p)}{p}}{Z_3(p) + R_2 + \frac{1}{pC_2}} = \frac{E_3(p)}{Z_3(p) + R_2 + \frac{1}{pC_2}} \quad (29)$$

Подставим значения $E_3(p)$, $Z_3(p)$ согласно (27), (28) и проведем несложные преобразования в выражении (29) для получения рациональной дроби (см. 24). В итоге значение $I_2(p)$ будет

$$I_2(p) = \frac{E + pL \cdot i_L(0)}{p^2 L \cdot (1 + R_2/R_1) + p(R_2 + L/R_1 C_2) + 1/C_2} \quad (30)$$

Подставим в (30) численные значения и получим

$$I_2(p) = \frac{1,505 \cdot p + 533,3}{p^2 + 190 \cdot p + 26666,6} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \quad (31)$$

где $F_1(p) = 1,505p + 533,3$; $F_2(p) = p^2 + 190p + 26666,6$

Определим корни многочлена знаменателя $F_2(p) = 0$; $p^2 + 190p + 26666,6 = 0$. Рассчитав, получим $p_1 = -95 + j132,8$; $p_2 = -95 - j132,8$.

теория

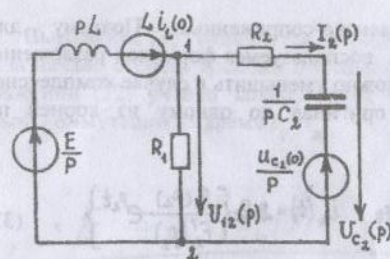


Рис. 13

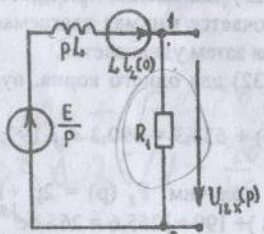


Рис. 14

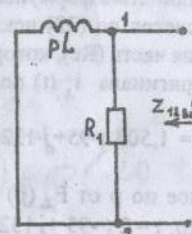


Рис. 15

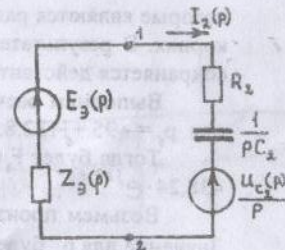


Рис. 16

$$\begin{aligned} & 0,125p^2 + 0,5p^2 + 20p + \\ & + 15,625p + 0,5 \cdot 10^4 = \\ & = 0,625p^2 + 35,625p + 95 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

$$\frac{pL \cdot R_1}{pL + R_1} + R_2 + \frac{1}{pC_2} = \frac{pL R_1 + pL R_2 + R_1 R_2 + \frac{pL + R_1}{pC_2}}{pL + R_1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{100 + p \cdot 0,282125}{p^2 \cdot 0,125(1 + \frac{20}{40}) + p(20 + \frac{0,125}{40 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}) + \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}}} = \\ & \frac{0,282125p + 100}{0,625p^2 + 35,625p + 95 \cdot 10^4} = \frac{0,4514p + 160}{0,625p^2 + 35,625p + 95 \cdot 10^4} \end{aligned}$$

Корни простые и комплексно-сопряженные. Поэтому для определения оригинала $i_2(t) = I_2(p)$ воспользуемся формулой разложения (25). При этом объем вычислений можно уменьшить в случае комплексно-сопряженных корней, рассчитав оригинал по одному из корней по следующим формулам

$$i_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(p_1)}{F'_2(p_1)} e^{p_1 t} \right\} \text{ или } i_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_2(p_2)}{F'_2(p_2)} e^{p_2 t} \right\}, \quad (32)$$

которые являются разновидностью формулы (25) разложения при простых корнях. В результатах расчетов по (32) исключается мнимая слагаемая и сохраняется действительная часть (Re), которая затем удваивается.

Выполним расчет оригинала $i_2(t)$ по (32) для одного корня, пусть для $p_1 = -95 + j132,8$.

Тогда будет $F_1(p_1) = 1,505(-95 + j132,8) + 533,3 = 390,3 + j199,3 = 438,24 e^{j27,05^\circ}$

Возьмем производное по p от $F_2(p)$ и получим $F'_2(p) = 2p + 190$. Значение для p_1 будет $F'_2(p_1) = 2(-95 + j132,8) + 190 = j265,6 = 265,6 e^{j90^\circ}$.

Результаты подставим в (32) и получим

$$i_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{438,24 e^{j27,05^\circ}}{265,6 e^{j90^\circ}} e^{(-95 + j132,8)t} \right\} = 3,3 \cdot e^{-95t} \cdot \cos(132,8t - 62,95^\circ), \text{ A}$$

Косинусоидальную функцию можем заменить синусоидальной и получим

$$i_2(t) = 3,3 \cdot e^{-95t} \sin(132,8t + 27,05^\circ) = 3,3 \cdot e^{-95t} \sin(132,8t + 0,4721 \text{ рад}), \quad (33)$$

Отметим, что полученный операторным методом результат (33) естественно совпадает с результатом классического метода (22). В этих двух результатах амплитуда тока $I_{m2cl} = 3,302$ и $I_{m2cl} = 3,3$, отличается всего на 0,06%, а начальная фаза $\psi_{i2cl} = 27,08^\circ$ и $\psi_{i2cl} = 27,05^\circ$ — в электрических градусах или в радианах $\psi_{i2cl} = 0,4726$ и $\psi_{i2cl} = 0,4721$ отличается всего на 0,11%. Этими погрешностями естественно пренебрегаем.

Также отметим, что при выполнении домашнего задания возможны незначительные отличия в расчетах переходной величины классическим и операторными методами. Допустимыми можно считать погрешности, составляющие не более 3%. Если же погрешности окажутся более 3%, то следует уточнять точность вычислений. При погрешностях существенно больше 3% следует искать допущенные принципиальные ошибки.

Выражение (33) отличается от выражения (22) по форме записи тем, что за начало отсчета времени $t=0$ принят момент третьей коммутации. В выражении (22) учтено запаздывание третьей коммутации от момента первой коммутации на время $t_1 + t_2$.

$$\begin{aligned} & \frac{E + pL i_L(0)}{p^2 L \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + p \left(R_2 + \frac{L}{R_1 C_2}\right) + \frac{1}{C_2}} = \\ & = \frac{100 + p0,282125}{p^2 \cdot 0,125 \left(1 + \frac{20}{40}\right) + p \left(20 + \frac{0,125}{40 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}\right) + \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}}} = \\ & = \frac{0,282125p + 100}{0,1875p^2 + 35,625p + 0,5 \cdot 10^4} = \\ & = \frac{1,5047p + 533,3}{\dots} \end{aligned}$$